Klassische Theoretische Physik II

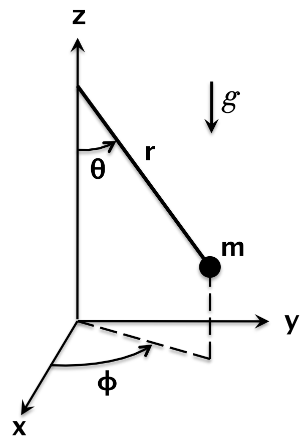
Vorlesung: Prof. Dr. K. Melnikov – Übung: Dr. M. Jaquier, Dr. R. Rietkerk

Übungsblatt 3

Ausgabe: 10.05 – Abgabe: 17.05 @ 09:45 Uhr – Besprechung: 20.05 & 21.05

– Auf Lösungen bitte Name, Matrikelnummer, Tutoriumnummer sowie Tutor(in) vermelden –

Aufgabe 1: Sphärisches Pendel **5 Punkte**



Ein sphärisches Pendel besteht aus einer masselosen Stange der Länge r, welche an einer Seite an einem festen Punkt angebracht ist, und an der anderen Seite eine Masse m befestigt hat. Das Pendel kann sich unter der Einwirkung der Schwerkraft frei in zwei Richtungen um den festen Aufhängepunkt bewegen. Die Position des Pendels lässt sich deshalb mit zwei sphärische Koordinaten (θ, ϕ) eindeutig beschreiben.

(a) Konstruieren Sie die Lagrange'sche Funktion des Systems.

(b) Die Lagrange'sche Funktion ist nicht explizit abhängig von der Zeit t. Geben Sie die einfachste Wahl der X und Ψ_i, sodass die Lagrange'sche Funktion unter der infinitesimalen Transformation

$$t' = t + \epsilon\, X(\{q_j\}, t)\,, \quad q_i' = q_i + \epsilon\, \Psi_i(\{q_j\}, t)\,, \tag{1.1}$$

wobei $\epsilon \ll 1$, invariant ist. Leiten Sie den Ausdruck der Erhaltungsgröße

$$I = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} (\Psi_i - X \dot{q}_i) + L\, X \tag{1.2}$$

her und geben Sie deren physikalische Interpretation.

(c) Die Lagrange'sche Funktion ist ausserdem unabhängig von der Koordinate ϕ. Wie lautet die entsprechende Symmetrietransformation? Leiten Sie die entsprechende Erhaltungsgröße aus Gleichung (1.2) her. Was ist die physikalische Interpretation dieser Erhaltungsgröße?

(d) Bestimmen Sie die Euler-Lagrange Gleichungen. Welche Gleichung führt zur Erhaltungsgröße in Frage (c)?

(e) Nehmen Sie an, dass $\theta = \theta_0$ konstant sei. Zeigen Sie, dass das Pendel in diesem Fall mit der konstanten Winkelfrequenz

$$\dot{\phi}_0 = \sqrt{\frac{g}{r \cos\theta_0}}\,, \tag{1.3}$$

um die vertikale Achse rotiert.

Aufgabe 2: Erhaltungsgrößen in verschiedenen Potenzialen $\boxed{\text{6 Punkte}}$

Betrachten Sie ein Teilchen mit Masse m und Position $\vec{r} = (r_1, r_2, r_3)$, dessen Bewegung durch die Lagrange'sche Funktion $L = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 - U(\vec{r}, t)$ beschrieben wird. Wir möchten verschiedene Potenziale $U(\vec{r}, t)$ betrachten, um zu üben wie man Symmetrietransformationen der Wirkung findet und die entsprechende Erhaltungsgrößen bestimmt.

(a) Es sei $U(\vec{r}, t) = U(\vec{r} - \vec{v}_0 t)$, wobei $\vec{v}_0$ ein konstanter Vektor ist. Welche infinitesimale Transformation der Form

$$t' = t + \epsilon\, X(\{r_j\}, t)\ , \quad r_i' = r_i + \epsilon\, \Psi_i(\{r_j\}, t)\ , \tag{2.1}$$

lässt die Lagrange'sche Funktion (und damit die Wirkung) invariant? Zeigen Sie dass die zugehörige Erhaltungsgröße durch

$$E(t) - \vec{p} \cdot \vec{v}_0 = \text{const}\ , \tag{2.2}$$

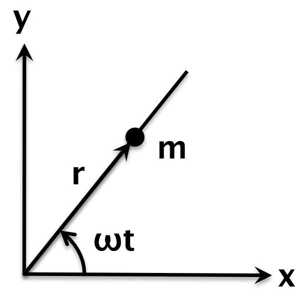
gegeben ist, wobei die Energie $E(t) = T + U = \frac{1}{2}m\dot{r}_i^2 + U$ *nicht* konstant ist.

(b) Es sei $U(\vec{r}, t) = -F_0\, r_3$, wobei F_0 eine konstante Kraft ist. Da die Lagrange'sche Funktion nicht explizit von der Zeit abhängt, ist $t' = t + \epsilon$ eine Symmetrie und damit die Energie erhalten. Finden Sie zusätzliche Arten von Symmetrietransformationen aus Gleichung (2.1). Zeigen Sie, dass dies zur Impulserhaltung in die r_1, r_2-Ebene und zur Drehimpulserhaltung um die r_3-Achse leitet. Können Sie dieses Problem auf dem Potenzial $U(\vec{r}, t) = -\vec{F}_0 \cdot \vec{r}$ verallgemeinern?

(c) Es sei $U(\vec{r}, t) = e\,\phi(\vec{r}, t) - \frac{e}{c}\vec{A}(\vec{r}, t) \cdot \dot{\vec{r}}$, für ein Teilchen mit Ladung e. Betrachten Sie die Wahl des Potentials $\phi = 0$ und $\vec{A} = B_0\, r_1\, \hat{e}_2$, welche einem konstanten Magnetfeld $\vec{B} = B_0\, \hat{e}_3$ entspricht. Geben Sie alle Symmetrietransformationen der Lagrange'schen Funktion an, sowie die zugehörige Erhaltungsgrößen in Abhängigkeit von r_i und $\dot{r}_i$.

Aufgabe 3: Gleitende Perle auf einem rotierenden Draht $\boxed{\text{4 Punkte}}$

Das gezeigte System besteht aus einer Perle mit Masse m welche frei auf einem rotierenden, masselosen Draht gleitet. Der Draht rotiert in der (x, y)-Ebene mit konstanter Winkelfrequenz ω.



(a) Konstruieren Sie die Lagrange'sche Funktion für dieses System.

(b) Berechnen Sie die Erhaltungsgröße, die daraus folgt, dass die Lagrange'sche Funktion nicht explizit zeitabhängig ist.

(c) Beschreibt die Erhaltungsgröße in Frage (b) die Energie der Perle? Begründen Sie Ihre Antwort.

(d) Finden und skizzieren Sie die Bahn $r(t)$ mit den Randbedingungen $r(0) = r_0 > 0$ und $\dot{r}(0) = 0$.