SoSe 2019

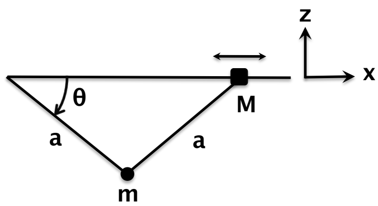
Klassische Theoretische Physik II

Vorlesung: Prof. Dr. K. Melnikov – Übung: Dr. M. Jaquier, Dr. R. Rietkerk

Übungsblatt 2

Ausgabe: 03.05 – Abgabe: 10.05 @ 09:45 Uhr – Besprechung: 13.05 & 14.05

Aufgabe 1: Rutschende Masse — 3 Punkte



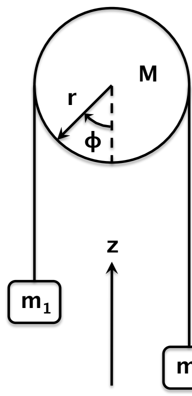
In dem gezeigten System kann eine Perle mit Masse M frei entlang einer horizontalen Stange gleiten. Ein Ball mit der Masse m ist mit zwei massenlosen Stangen der Länge a an dieser befestigt. Die Schwerkraft wirkt in vertikale Richtung.

(a) Konstruieren Sie die Lagrange'sche Funktion $L(\theta, \dot{\theta})$ für dieses System.

(b) Bestimmen Sie die Euler-Lagrange Gleichung.

Aufgabe 2: Atwood'sche Fallmaschine — 7 Punkte

Die Atwood'sche Fallmaschine besteht aus zwei Lasten mit den Massen m_1 und m_2, die durch ein massenloses Seil der Länge ℓ verbunden sind, welches eine Umlenkrolle mit Radius r und Masse M umläuft. Wenn eine der Massen sich nach unten bewegt, zieht sie die andere Masse nach oben. Die Umlenkrolle rotiert dann genau so, dass das Seil nicht rutscht. Ziel dieser Aufgabe ist es, die Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren zu üben.



(a) Die kinetische Energie der Umlenkrolle ist gegeben durch

$$T_{\text{Rolle}} = \tfrac{1}{4} M r^2 \omega^2 \;, \tag{2.1}$$

wobei $\omega = \dot{\phi}$ die Winkelfrequenz ist. (Diese Beziehung wird später in der Vorlesung hergeleitet.) Zeigen Sie, dass die Abrollbedingung impliziert, dass $\omega = \dot{z}_1/r$, wobei z_1 die vertikale Position der Masse m_1 ist.

(b) Konstruieren Sie die Lagrange'sche Funktion $L(z_1, \dot{z}_1, z_2, \dot{z}_2)$, wobei z_2 die vertikale Position der Masse m_2 ist. (Der Mittelpunkt der Umlenkrolle bleibt fest.)

(c) Drücken Sie die Zwangsbedingung, dass das Seil die feste Länge ℓ hat, in der Form $f(z_1, z_2) = 0$ aus.

(d) Bestimmen Sie die Euler-Lagrange Gleichungen für $L_{\text{tot}} = L(z_1, \dot{z}_1, z_2, \dot{z}_2) + \lambda f(z_1, z_2)$.

(e) Eliminieren Sie den Lagrange'schen Multiplikator λ in den Euler-Lagrange Gleichungen und verwenden Sie die Zwangsbedingung $f(z_1, z_2) = 0$, um die Beschleunigung

$$\ddot{z}_1 = \frac{(m_2 - m_1)g}{m_1 + m_2 + M/2} \,, \tag{2.2}$$

von der Masse m_1 herzuleiten.

(f) Die auf Masse der m_2 wirkende Gesamtkraft ist die Vektorsumme der Spannung des Seils (nach oben) und der Schwerkraft (nach unten). Berechnen Sie die Spannung des an der Masse m_2 befestigten Seils.

(g) Können Sie eine physikalische Interpretation des Lagrange'schen Multiplikators λ angeben?

Aufgabe 3: Snelliussches Brechungsgesetz **6 Punkte**

Das Prinzip von Fermat besagt, dass Licht sich auf der Bahn ausbreitet, welche die kürzeste Zeit benötigt. Ziel der Aufgabe ist es, aus diesem Prinzip das Snelliussche Brechungsgesetz herzuleiten.

(a) Zeigen Sie, dass die Zeit, welche das Licht braucht um in einer Ebene in einem Medium mit Brechungsindex $n(x, y)$ vom Punkt P mit Koordinaten (x_1, y_1) zum Punkt Q mit Koordinaten (x_2, y_2) zu gelangen, durch

$$T[y(x)] = \int_P^Q dt = \int_{x_1}^{x_2} dx\, F(y(x), y'(x), x) \,, \tag{3.1}$$

gegeben ist, wobei

$$F(y(x), y'(x), x) = \frac{n(x, y)}{c}\sqrt{1 + y'(x)^2} \,, \tag{3.2}$$

ist.[1]

(b) Stellen Sie eine Analogie zwischen Fermat's Prinzip und dem Prinzip der kleinsten Wirkung her, um für die Bahn $y(x)$, welche $T[y(x)]$ minimiert, die entsprechende Euler-Lagrange Gleichung zu erhalten. Zeigen Sie, das diese mit F aus Gleichung (3.2)

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y'(x)\, n(x, y)}{\sqrt{1 + y'(x)^2}}\right) = \frac{\partial n(x, y)}{\partial y}\sqrt{1 + y'(x)^2} \tag{3.3}$$

impliziert.

[1] Die Lichtgeschwindigkeit in einem Medium ist durch $v = c/n$ gegeben.

(c) Zeigen Sie, dass Licht sich in einem Bereich mit konstanten $n(x, y) = n_0$ entlang einer Geraden bewegt.

(d) Betrachten Sie nun die Situation in Abbildung 1, wobei

$$n(x, y) = n(x) = \begin{cases} n_1 & \text{für } x < 0 \\ n_2 & \text{für } x > 0 \end{cases} \tag{3.4}$$

mit n_1 und n_2 unterschiedliche Konstanten. Benutzen Sie die Lösung aus Frage (c) in beiden Bereichen, und verwenden Sie Gleichung (3.3) um das Snelliussche Brechungsgesetz

$$n_1 \sin(\theta_1) = n_2 \sin(\theta_2) \tag{3.5}$$

herzuleiten.

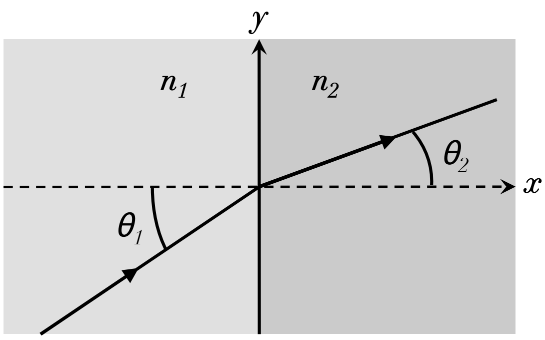


Abbildung 1: Brechung von Licht auf der Grenzfläche zwischen zwei Bereichen mit unterschiedlichen konstanten Brechungsindizes.