# Klassische Theoretische Physik II

Vorlesung: Prof. Dr. K. Melnikov – Übung: Dr. M. Jaquier, Dr. R. Rietkerk

## Übungsblatt 1

Ausgabe: 26.04 – Abgabe: 03.05 @ 09:45 Uhr – Besprechung: 06.05 & 07.05

### Aufgabe 1: Teilchen im Gravitationsfeld — 4 Punkte

Ein Teilchen der Masse $m$ fällt vertikal im konstanten Gravitationsfeld der Erde. Wir beschreiben den Pfad des Teilchens mit dem Ansatz $z(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2$, wobei $c_0, c_1$ und $c_2$ drei unbekannte Konstanten sind.

(a) Geben Sie die Lagrangefunktion $L$ an, die das System beschreibt.

(b) Bestimmen Sie die Konstanten $c_0$ und $c_1$ aus den Randbedingungen $z(0) = h$ und $z(T) = 0$.

(c) Berechnen Sie die Wirkung

$$S = \int_0^T \mathrm{d}t \; L(z(t), \dot{z}(t)) \;, \tag{1.1}$$

als Funktion von $m, g, h, T$ und $c_2$.

(d) Benutzen Sie das Prinzip der kleinsten Wirkung und zeigen Sie, dass $c_2 = -g/2$. Stimmt das Resultat mit dem überein, was Sie erwartet haben?

### Aufgabe 2: Lagrangefunktion in verschiedenen Systemen — 6 Punkte

Für die folgenden Systeme ist jeweils die Lagrangefunktion $L$ zu bestimmen. Schreiben Sie $L(\vec{q}_i(t), \dot{\vec{q}}_i(t), t)$ dabei zunächst in Kartesischen Koordinaten auf. Bestimmen Sie dann die Zwangsbedingungen und schreiben Sie die Lagrangefunktion in Abhängigkeit der unabhängigen Koordinaten.

(a) Abbildung 1(a): Eine Masse $M$ bewegt sich reibungsfrei auf der waagrechten Ebene und ist dabei an einer Feder mit Federkonstante $k$ und Auslenkung $x$ befestigt. An der Masse $M$ ist ein Pendel mit Masse $m$ und Länge $l$ aufgehängt. Die Bewegung findet in eine Ebene statt.

(b) Zwei Massen $m_1$ und $m_2$ bewegen sich unter dem Einfluss der Schwerkraft reibungsfrei auf einem Keil. Sie sind dabei durch einen masselosen Seil der Länge $l = l_1 + l_2$ verbunden. Die Winkel $\theta_1$ und $\theta_2$ des Keils sind fest gegeben.

(c) Abbildung 1(c): Eine Perle mit Masse $m$ gleitet reibungsfrei entlang eines Kreisförmig gebogenen Drahtes mit Radius $r$. Der Draht befindet sich in einer Ebene welche die $z$-Achse enthält und um dieselbe mit konstanter Kreisfrequenz $\omega$ rotiert.

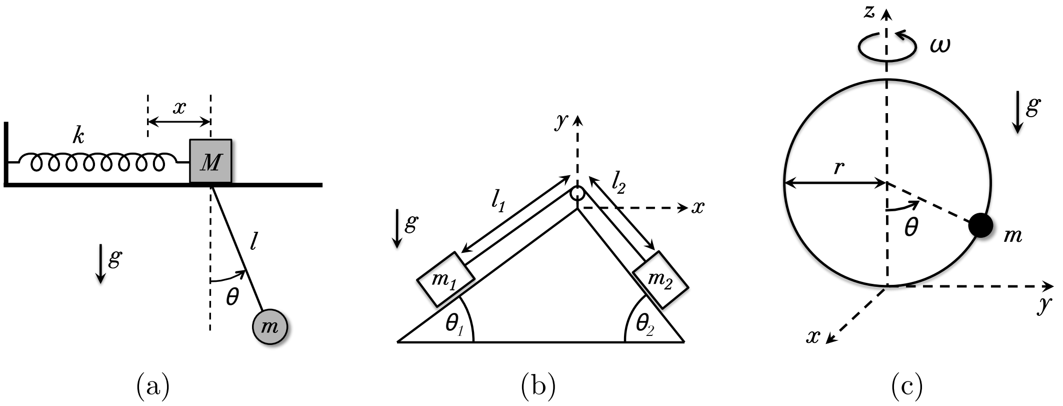



Abbildung 1: Drei verschiedene Systeme.

**Aufgabe 3: Die Lagrangefunktion mit geschwindigkeitsabhängigem Potential** **4 Punkte**

Betrachten Sie eine Lagrangefunktion $L$, welche die Bewegung eines Teilchens der Masse $m$ in einem geschwindigkeitsabhängigen Potential $U$ beschreibt

$$L = \tfrac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 - U(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \ . \tag{3.1}$$

Das Potential schreiben wir als

$$U(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = e\,\phi(\vec{r}, t) - \frac{e}{c} \vec{A}(\vec{r}, t) \cdot \dot{\vec{r}} \ , \tag{3.2}$$

wobei $e$ und $c$ zwei Konstanten sind, $\phi(\vec{r}, t)$ ist ein elektrisches Potential und $\vec{A}(\vec{r}, t)$ ist ein Vektorpotential.

(a) Bestimmen Sie die Euler-Lagrange Gleichungen.

(b) Verwenden Sie die folgende Formel, die wir in Übungsblatt 0 diskutiert haben,

$$\vec{\nabla}\,(\vec{x} \cdot \vec{y}\,) = (\vec{x} \cdot \vec{\nabla}\,)\,\vec{y} + (\vec{y} \cdot \vec{\nabla}\,)\,\vec{x} + \vec{y} \times (\vec{\nabla} \times \vec{x}\,) + \vec{x} \times (\vec{\nabla} \times \vec{y}\,) \ , \tag{3.3}$$

um den Term $\frac{\partial}{\partial \vec{r}} (\vec{A} \cdot \dot{\vec{r}}\,) \equiv \vec{\nabla}\,(\vec{A} \cdot \dot{\vec{r}}\,)$ in den Euler-Lagrange Gleichungen umzuschreiben.

(c) Zeigen Sie, dass man die Euler-Lagrange Gleichungen in folgende Form umschreiben kann

$$m \ddot{\vec{r}} = -\frac{e}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - e \vec{\nabla} \phi + \frac{e}{c}\, \dot{\vec{r}} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \ . \tag{3.4}$$

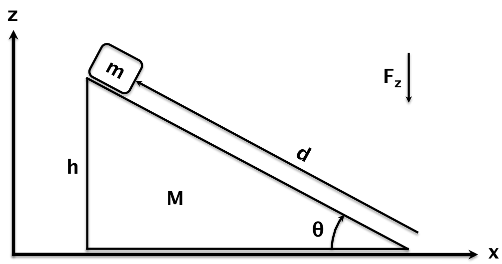
(d) In Maxwell's Theorie des Elektromagnetismus drückt man elektrische und magnetische Felder durch das elektrische Potential $\phi$ und das Vektorpotential $\vec{A}$ aus. Es gilt

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\phi \ , \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \ . \tag{3.5}$$

Benutzen Sie diese Formeln um die rechte Seite der Gl. (3.4) durch $\vec{E}$ und $\vec{B}$ auszudrücken. Können Sie die Kraft identifizieren, die auf der rechten Seite der Gl. (3.4) auftaucht?

## Aufgabe 4: Schiefe Ebene — 7 Punkte

Eine Schachtel der Masse $m$ sei auf einem Gefälle der Masse $M$ platziert. Das Gefälle hat einen Steigungswinkel $\theta$ und befindet sich auf einer horizontalen Ebene, auf der es sich ohne Reibung frei bewegen kann. Die Schachtel fängt aus der Ruhe an, entlang der schiefen Seite nach unten zu rutschen. Wir wollen bestimmen, wie viel Zeit die Schachtel braucht, um die horizontale Ebene zu erreichen.




(a) Konstruieren Sie die Lagrangefunktion die dieses mechanische System beschreibt. Benutzen Sie Kartesische Koordinaten $(x_M, y_M)$ und $(x_m, y_m)$, um die Positionen der Schachtel und des Gefälles auszudrücken.

(b) Diese Kartesische Koordinaten sind nicht unabhängig. Argumentieren Sie, dass man $y_M$ Null setzen kann. Nehmen Sie als verallgemeinerte Koordinate die Distanz $d$ zwischen der Schachtel und der horizontalen Ebene entlang des Gefälles (siehe Abbildung). Eliminieren Sie $x_m$ und $y_m$ in der Lagrangefunktion.

(c) Bestimmen Sie zwei Euler-Lagrange Gleichungen.

(d) Verwenden Sie diese Gleichungen um die Beschleunigungen $\ddot{x}_M$ und $\ddot{d}$ zu finden.

(e) Was erwarten Sie für $\ddot{x}_M$ und $\ddot{d}$ in den zwei Grenzfällen $\theta \to 0$ und $\theta \to \pi/2$? Stimmt Ihre Erwartung mit dem Ergebnis in (d) überein?

(f) Was passiert mit $\ddot{d}$, falls $m \ll M$ (für $\theta \approx 30°$)?

(g) Die Schachtel sei um Zeitpunkt $t = 0$ in Ruhe auf dem höchsten Punkt (Höhe $h$) des Gefälles platziert. Wie viel Zeit braucht die Schachtel um die horizontale Ebene zu erreichen?