Karlsruher Institut für Technologie

SoSe 2019

Klassische Theoretische Physik II

Vorlesung: Prof. Dr. K. Melnikov – Übung: Dr. M. Jaquier, Dr. R. Rietkerk

Übungsblatt 0

Ausgabe: 23.04 – Besprechung: 29.04 & 30.04

Aufgabe 1: Minimierungsproblem

Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = a\,\frac{x}{x_0} + b\,\frac{x_0^2}{x^2}, \qquad \text{für } \; x > 0, \tag{1.1}$$

mit den Konstanten $a, b > 0$ und $x_0 > 0$.

(a) Bestimmen Sie die Position x_{min} des Minimums dieser Funktion und entwickeln Sie die Funktion um diesen Punkt ($x = x_{\text{min}}$) zu einer Taylorreihe bis zur zweiten Ordnung.

Aufgabe 2: Vektoranalysis

Ein dreidimensionaler Vektor kann als $\vec{A} = A_1\vec{e}_1 + A_2\vec{e}_2 + A_3\vec{e}_3$ geschrieben werden, wobei die $\vec{e}_i$ die Basisvektoren in der üblichen kartesischen Basis sind. In dieser Aufgabe bezeichnen $\vec{A}, \vec{B}, \ldots$ solche dreidimensionalen Vektoren.

(a) Zeigen Sie, dass das Skalar- und Kreuzprodukt zweier solcher Vektoren folgendermaßen ausgedrückt werden kann:

$$\text{Skalarprodukt:} \qquad \vec{A} \cdot \vec{B} = \sum_{i=1}^{3} A_i B_i\,, \tag{2.1}$$

$$\text{Kreuzprodukt:} \qquad (\vec{A} \times \vec{B})_k = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \varepsilon_{ijk} A_i B_j\,. \tag{2.2}$$

Dabei ist ε_{ijk} das Levi-Civita-Symbol, das ein Objekt mit drei Indizes ist und definiert wird als

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0, & \text{wenn zwei beliebige Indizes gleich sind,} \\ 1, & \text{wenn } i, j, k \text{ eine gerade Permutation von 1,2,3 ist,} \\ -1, & \text{wenn } i, j, k \text{ eine ungerade Permutation von 1,2,3 ist.} \end{cases} \tag{2.3}$$

(b) Welche Bedeutung hat der offene Index k in dem Ausdruck für das Kreuzprodukt aus Gl. (2.2) bzw. die Abwesenheit eines offenen Index im Ausdruck für das Skalarprodukt aus Gl. (2.1)?

(c) Zeigen Sie mit Hilfe der Gln. (2.1), (2.2) sowie der Tatsache

$$\sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}\,, \tag{2.4}$$

die Identität

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{B} \cdot \vec{C})(\vec{A} \cdot \vec{D})\,. \tag{2.5}$$

(d) Der Gradient einer skalaren Funktion ist eine vektorwertige Funktion

$$\vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)\,. \tag{2.6}$$

Zeigen Sie mit den Gln. (2.1), (2.2) und (2.4), dass

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f) = 0 \tag{2.7}$$

für jede skalare Funktion f gilt. Zeigen Sie außerdem, dass

$$\vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} + \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) + \vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B})\,. \tag{2.8}$$

(e) Die Transformation von kartesischen Koordinaten zu Zylinderkoordinaten,

$$(x, y, z) \longrightarrow (r, \theta, z) \tag{2.9}$$

ist durch $x = r\cos\theta$ und $y = r\sin\theta$ gegeben. Zeigen Sie, dass in diesem Koordinatensystem der Laplaceoperator ($\Delta \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$), der auf eine skalare Funktion wirkt, durch

$$\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{2.10}$$

gegeben ist.

Aufgabe 3: Eigenwerte und Eigenvektoren

Gegeben sei die Matrix

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} +3\omega & -\sqrt{2}\omega & +\omega \\ -\sqrt{2}\omega & +4\omega & -\sqrt{2}\omega \\ +\omega & -\sqrt{2}\omega & +3\omega \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

mit einer positiven reellen Zahl ω.

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{M}$.

(b) Bestimmen Sie die Eigenvektoren der Matrix $\mathbf{M}$ und normieren Sie diese.

(c) Zerlegen Sie den Vektor $\vec{v} = (1, 0, 0)$ in eine Linearkombination der Eigenvektoren, die Sie in der letzten Teilaufgabe erhalten haben.

Aufgabe 4: Differentialgleichungen

Lösen Sie die folgende Differentialgleichungen mit den angegebenen Rand- bzw. Anfangsbedingungen.

(a) Bestimmen Sie die Funktion $x(t)$, die die folgende Differentialgleichung zweiter Ordnung erfüllt

$$\ddot{x}(t) = +\kappa^2 x(t)\,, \tag{4.1}$$

mit der reellen Konstante $\kappa > 0$ und den Randbedingungen $x(0) = 1$ und $x(1) = 0$.

(b) Bestimmen Sie die Funktion $x(t)$, die die folgende Differentialgleichung zweiter Ordnung erfüllt

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 (x(t) - x_0)\,, \tag{4.2}$$

mit den reellen Konstanten $\omega > 0$ und x_0 und den Anfangsbedingungen $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = 0$.

Aufgabe 5: Integrale

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$\text{(a)} \qquad \int \frac{(1-x)dx}{x^2 - 4x + 4}\,, \tag{5.1}$$

$$\text{(b)} \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}\,, \tag{5.2}$$

$$\text{(c)} \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x - x^2}} \tag{5.3}$$

$$\text{(d)} \qquad \int_0^\pi \frac{\sin\phi\, d\phi}{1 + \cos^2\phi}\,, \tag{5.4}$$

$$\text{(e)} \qquad \int_0^\pi \frac{\sin\phi\, d\phi}{2 - \cos^2\phi} \tag{5.5}$$

$$\text{(f)} \qquad \int_{-1}^{+1} dz \int_0^1 d\rho\, \rho \int_0^{2\pi} d\phi \left(z^2 + \rho^2 \sin^2\phi\right)\,. \tag{5.6}$$