Vorlesung 7: Kleine Schwingungen mit vielen Freiheitsgraden

Wir betrachten ein mechanisches System mit N Freiheitsgraden, das durch folgende Lagrangefunktion beschrieben wird

$$L = \sum_{i,j} a_{ij}(q_1, ..., q_N)\dot{q}_i\dot{q}_j - U(q_1, ..., q_N). \tag{1}$$

Wir nehmen an, dass die potentielle Energie ein Minimum für $q_i = q_{0,i}$, $i = 1...N$ hat. Die Bewegung des Systems in der Nähe von $\vec{q} = \vec{q}_0$ ist eine Schwingung. Um die Bewegung des Systems in der Nähe von $\vec{q} = \vec{q}_0$ zu beschreiben, entwickeln wir die Lagrangefunktion in eine Taylorreihe in $\vec{\xi} = \vec{q} - \vec{q}_0$. Die Auslenkungen $|\vec{\xi}|$ sind klein, weshalb wir die Lagrangefunktion bis zur zweiten Ordnung in ξ entwickeln. Wir sehen, dass $\dot{q}_i = \dot{\xi}_i$ genauso klein ist wie ξ_i selbst, weil für Schwingungen $\dot{\xi}_i \sim \omega\xi_i$ ist, wobei ω der Frequenz der Schwingungen entspricht. Das bedeutet, dass wir in der kinetischen Energie die Funktionen $a_{ij}(q_1, ..., q_N)$ durch Konstanten $m_{ij}/2$ ersetzen können sowie die potentielle Energie durch

$$U(q_1, .., q_N) = U_0 + \frac{1}{2}k_{ij}\xi_i\xi_j + \mathcal{O}(\xi^3). \tag{2}$$

Wir erhalten dann die universelle Lagrangefunktion, die kleine Schwingungen von Systemen mit vielen Freiheitsgraden beschreibt

$$L = \frac{1}{2}\sum_{ij}(m_{ij}\dot{\xi}_i\dot{\xi}_j - k_{ij}\xi_i\xi_j). \tag{3}$$

Die Koeffizienten m_{ij} und k_{ij} sind symmetrisch

$$m_{ij} = m_{ji}, \qquad\qquad k_{ij} = k_{ji}. \tag{4}$$

Die Euler-Lagrange Gleichungen lauten

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_i} = \frac{\partial L}{\partial \xi_i} \qquad\qquad \Rightarrow \sum_{j=1}^{N}\left[m_{ij}\ddot{\xi}_j + k_{ij}\xi_j\right] = 0 \tag{5}$$

Die letzte Gleichung können wir als eine Matrizengleichung schreiben

$$\hat{m}\ddot{\vec{\xi}} + \hat{k}\vec{\xi} = 0, \tag{6}$$

wobei die Matrizen $\hat{m}, \hat{k}$ die Elemente m_{ij} und k_{ij} haben.

Wir nehmen an, dass das System mit einer bestimmten Frequenz ω schwingt. Wir schreiben dann

$$\vec{\xi} = \mathrm{Re}\left[\vec{a}e^{i\omega t+\varphi}\right], \tag{7}$$

setzen diesen Ansatz in Gl. (6) ein und erhalten

$$\left[-\omega^2\hat{m} + \hat{k}\right]\vec{a} = 0. \tag{8}$$

Aus dieser Gleichung Gl. (8) bekommen wir die Frequenzen ω und die Amplituden $\vec{a}$ der Schwingungen. Das funktioniert folgendermaßen: Die homogene lineare Gleichung Gl. (8) hat nicht-triviale[1] Lösungen für die Amplitude $\vec{a}$ nur dann, wenn

$$\det\left[-\omega^2\hat{m}+\hat{k}\right]=0. \tag{9}$$

Die Eigenfrequenzen des Systems folgen aus dieser Gleichung. Für ein System mit N Freiheitsgraden gibt es N Eigenfrequenzen, wovon aber manche entartet sein können. Nachdem die Frequenzen bekannt sind, bestimmt man die zugehörigen Amplituden mit Hilfe von Gl. (8).

Die Frequenzen und Amplituden haben wichtige Eigenschaften. Zum Beispiel multiplizieren wir Gl. (8) mit dem transponierten Vektor $\vec{a}$ und erhalten[2]

$$\omega^2=\frac{a_i k_{ij} a_j}{a_i m_{ij} a_j}. \tag{10}$$

Die Matrizen $\hat{m}$ und $\hat{k}$ sollen positiv sein, d.h.

$$\omega^2>0 \tag{11}$$

und alle Frequenzen sind reell.

Eine andere Eigenschaft ist die "Orthogonalität", die die Amplituden zu verschiedenen Frequenzen erfüllen. Bezeichen wir die verschiedenen Frequenzen mit einem Label s. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&-\omega_s^2 m_{ij} a_j^{(s)}+k_{ij}a_j^{(s)}=0\\
&-\omega_{s'}^2 m_{ij} a_j^{(s')}+k_{ij}a_j^{(s')}=0
\end{aligned} \tag{12}$$

Wir multiplizieren die erste Gleichung mit $a_i^{(s')}$, die zweite mit $a_i^{(s)}$ und summieren (implizit) über i. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\omega_s^2 a_i^{(s')} m_{ij} a_j^{(s)} &= a_i^{(s')} k_{ij} a_j^{(s)},\\
\omega_{s'}^2 a_i^{(s)} m_{ij} a_j^{(s')} &= a_i^{(s)} k_{ij} a_j^{(s')},
\end{aligned} \tag{13}$$

Die Matrizen $\hat{m}$ und $\hat{k}$ sind symmetrisch. Das heißt, dass die rechten Seiten gleich sind. Wir subtrahieren die zwei Gleichungen Gl. (13) von einander und erhalten

$$(\omega_s^2-\omega_{s'}^2)a_i^{(s')} m_{ij} a_j^{(s)}=0. \tag{14}$$

Das bedeutet, dass falls $\omega_s \neq \omega_{s'}$ ist, gilt

$$a_i^{(s')} m_{ij} a_j^{(s)}=0, \qquad a_i^{(s')} k_{ij} a_j^{(s)}=0. \tag{15}$$

[1] "Nicht-trivial" bedeutet $\vec{a}\neq 0$.

[2] Zur Erinnerung: Zwei identische Indizes in einer Formel bedeuten, dass man über diese Indizes summieren muss.

Wir können die Amplituden so normieren, dass die folgende Gleichung gilt

$$a_i^{(s')} m_{ij} a_j^{(s)} = \delta^{ss'}, \qquad\qquad a_i^{(s')} k_{ij} a_j^{(s)} = \omega_s^2 \delta_{ss'}. \tag{16}$$

Diese "Orthogonalitätsrelationen" für Amplituden kann man benutzen, um die Berechnung von Eigenamplituden zu vereinfachen. Falls es in einem System entartete Frequenzen gibt, sind die entsprechenden Amplituden nicht unbedingt orthogonal (im Sinne von Gl. (15)). Es ist allerdings möglich, die entarteten Amplituden so zu wählen, dass sie orthogonal zueinander sind.

Angenommen, dass wir die Eigenfrequenzen und die Eigenamplituden berechnet haben, und dass wir alle diese N unabhängigen Vektoren als Basis benutzen können. Wir schreiben dann

$$\vec{\xi} = \sum_{s=1}^{N} r_s \vec{a}^{(s)}, \tag{17}$$

wobei die r_s die Koordinaten des (N-dimensionalen) Vektors $\vec{\xi}$ in der neuen Basis sind. Wir nennen diese Koordinaten "Normalkoordinaten".

Wir benutzen dann Gl. (17), um die Lagrangefunktion Gl. (3) umzuschreiben. Mit Hilfe von Gl. (16) erhalten wir

$$2U = \sum_{ij} k_{ij} \xi_i \xi_j = \sum_{s,s'} r_s r_{s'} \sum_{ij} k_{ij} a_i^{(s')} a_j^{(s)} = \sum_{s,s'} r_s r_{s'} \delta_{ss'} \omega_s^2 = \sum_s \omega_s^2 \, r_s^2. \tag{18}$$

und

$$2T = \sum_{ij} m_{ij} \dot{\xi}_i \dot{\xi}_j = \sum_{s,s'} \dot{r}_s \dot{r}_{s'} \sum_{ij} m_{ij} a_i^{(s')} a_j^{(s)} = \sum_{s,s'} \dot{r}_s \dot{r}_{s'} \delta_{ss'} = \sum_s \dot{r}_s^2. \tag{19}$$

Wir erhalten

$$L = \frac{1}{2} \sum_s \left[\dot{r}_s^2 - \omega_s^2 r_s^2 \right]. \tag{20}$$

Es folgt aus der Lagrangefunktion Gl. (20), dass die Bewegungsgleichungen in Normalkoordinaten unabhängig von einander sind. Die Euler-Lagrange Gleichung lautet dann

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_s} = \frac{\partial L}{\partial r_s}, \qquad\qquad \Rightarrow \ddot{r}_s + \omega_s^2 r_s = 0. \tag{21}$$

Die Zeitabhängigkeit der Normalkoordinaten ist dann

$$r_s = C_s \cos(\omega_s t + \varphi_s). \tag{22}$$

Die allgemeine Lösung für die Auslenkung $\vec{\xi}$ ist dann

$$\vec{\xi}(t) = \sum_{s=1}^{N} C_s \vec{a}_s \cos(\omega_s t + \varphi_s) \tag{23}$$

In dieser Lösung haben wir $2N$ Konstanten ($C_s, \varphi_s,\ s = 1...N$), die wir wählen, um die Randbedingungen zu erfüllen.

Wir betrachten ein Beispiel. Die Lagrangefunktion sei

$$L = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\dot{y}^2 - \frac{\omega_0^2}{2}\left(x^2 + y^2 - 2\alpha xy\right). \tag{24}$$

Das bedeutet, dass die Matrizen $\hat{m}$, $\hat{k}$ so aussehen

$$\hat{m} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{k} = \omega_0^2 \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix}. \tag{25}$$

Die Matrix $\hat{O} = -\omega^2\hat{m} + \hat{k}$ ist dann

$$\hat{O} = \begin{pmatrix} -\omega^2 + \omega_0^2 & -\alpha\omega_0^2 \\ -\alpha\omega_0^2 & -\omega^2 + \omega_0^2 \end{pmatrix}. \tag{26}$$

Die Determinante dieser Matrix muss Null sein

$$\det\left[-\omega^2\hat{m} + \hat{k}\right] = (\omega^2 - \omega_0^2)^2 - \alpha^2\omega_0^4 = 0. \tag{27}$$

D.h. die mögliche Eigenfrequenzen sind

$$\omega^2 - \omega_0^2 = \pm\alpha\omega_0^2 \qquad \Rightarrow \omega_\pm^2 = \omega_0^2\left(1 \pm \alpha\right). \tag{28}$$

Wir lösen dies, indem wir zuerst $\mathcal{O}(\omega_\pm^2)$ berechnen und dann die Amplituden. Wir erhalten

$$\hat{\mathcal{O}}_\pm = \hat{\mathcal{O}}|_{\omega=\omega_\pm}, \tag{29}$$

wo

$$\hat{\mathcal{O}}_{\omega_\pm} = -\omega_0^2 \begin{pmatrix} \pm\alpha & \alpha \\ \alpha & \pm\alpha \end{pmatrix}. \tag{30}$$

Wir finden die Eigenamplituden

$$\hat{\mathcal{O}}_\pm\vec{a}_\pm = 0, \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ \mp 1 \end{pmatrix}. \tag{31}$$

Die Eigenamplituden sind richtig normiert; z.B.

$$\vec{a}_+^T\hat{m}\vec{a}_+ = 1. \tag{32}$$

Wir machen jetzt die Variablentransformation zu den Normalkoordinaten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = r_+\vec{a}_+ + r_-\vec{a}_-. \tag{33}$$

Dann

$$x = \frac{r_+ + r_-}{\sqrt{2}}, \quad y = \frac{-r_+ + r_-}{\sqrt{2}}, \tag{34}$$

sodass

$$L = \frac{\dot{r}_+^2}{2} + \frac{\dot{r}_-^2}{2} - \frac{\omega_+^2}{2}r_+^2 - \frac{\omega_-^2}{2}r_-^2. \tag{35}$$

Die allgemeine Lösung ist dann

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{C_+}{\sqrt{2}} \cos(\omega_+ t + \varphi_+) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{C_-}{\sqrt{2}} \cos(\omega_- t + \varphi_-) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{36}$$

Die Konstanten $C_\pm, \phi_\pm$ wählt man so, dass die Randbedingungen erfüllt sind.

Normalkoordinaten sind auch nützlich, um erzwungene Schwingungen in Systemen mit vielen Freiheitsgraden zu untersuchen. In der Tat lautet die universelle Lagrangefunktion in diesem Fall

$$L = \frac{1}{2} \sum_{ij} \left[m_{ij} \dot{\xi}_i \dot{\xi}_k - k_{ij} \xi_i \xi_j \right] - \sum_i f_i(t) \xi_i. \tag{37}$$

Um erzwungene Schwingungen zu studieren, bestimmen wir die Normalkoordinaten und schreiben die Lagrangefunktion zu

$$L = \frac{1}{2} \sum_s \left[\dot{r}_s^2 - \omega_s^2 r_s^2 \right] - \sum_s f_s(t) r_s \tag{38}$$

um, wobei

$$f_s(t) = \sum_i f_i(t) a_i^{(s)} = \vec{f}(t) \cdot \vec{a}^{(s)}. \tag{39}$$

Es folgt aus Gl. (38,39), dass die erzwungene Schwingung einer Normalkoordinate unabhängig von anderen Normalkoordinaten abläuft. Die Stärke der anregenden Kraft für eine Eigenfrequenz ω_s ist durch die Projektion des Kraftvektors $\vec{f}$ auf die Eigenamplitude $\vec{a}^{(s)}$ gegeben. Für eine harmonische Kraft $\vec{f}(t) \sim \cos(\omega t + \phi)$ gibt es eine Resonanz, falls ω gleich einer der Eigenfrequenzen ist, falls die Projektion von $\vec{f}$ auf die entsprechende Eigenamplitude von Null verschieden ist.

Wir können die Berechnung von Amplituden stark vereinfachen, indem wir die Symmetrien der Lagrangefunktion benutzen. Wir nehmen an, dass die Lagrangefunktion unter der folgenden Transformation invariant ist

$$\xi_i \to \xi_i' = S_{ij} \xi_j, \tag{40}$$

wobei die Matrix $\hat{S}$ folgende Gleichung erfüllt

$$\hat{S}^2 = 1. \tag{41}$$

Diese zwei Gleichungen bedeuten, dass die Matrizen $\hat{m}$ und $\hat{k}$ die folgenden Gleichungen erfüllen

$$S^T \hat{m} S = \hat{m}, \qquad S^T \hat{k} S = \hat{k}. \tag{42}$$

Die Gleichung, die die Eigenamplitude $\vec{a}_s$ erfüllt lautet

$$\left[-\omega_s^2 \hat{m} + \hat{k} \right] \vec{a}_s = 0. \tag{43}$$

Wir multiplizieren diese Gleichung mit S^T von links and benutzen $SS = 1$, um zu schreiben

$$0 = \left[-\omega_s^2 \hat{m} + \hat{k}\right] \vec{a}_s = S^T \left[-\omega_s^2 \hat{m} + \hat{k}\right] \; 1 \; \vec{a}_s = S^T \left[-\omega_s^2 \hat{m} + \hat{k}\right] \; SS \; \vec{a}_s = \left[-\omega_s^2 \hat{m} + \hat{k}\right] S \; \vec{a}_s \tag{44}$$

Diese Gleichung bedeutet, dass nicht nur $\vec{a}_s$, sondern auch $S\vec{a}_s$ eine Eigenamplitude zur Frequenz ω_s ist. Stellen wir uns vor, dass die Schwingung mit dieser Frequenz nicht entartet ist. Dann muss gelten

$$S\vec{a}_s = \lambda \vec{a}_s. \tag{45}$$

Wir multiplizieren diese Gleichung mit S, benutzen $S^2 = 1$ und erhalten

$$1 = \lambda^2, \qquad\qquad \lambda = \pm 1. \tag{46}$$

Das heißt, dass der Vektor $\vec{a}_s$ ein Eigenvektor der Matrix S zum Eigenwert ± 1 ist. Diese Eigenschaft der Eigenamplituden kann man verwenden, um die Berechnung in komplizierten (aber symmetrischen) Fällen zu vereinfachen.

Als Beispiel betrachten wir drei Teilchen, die über zwei Federn miteinander verbunden sind. Die Lagrangefunktion lautet

$$L = \frac{m\dot{x}_1^2}{2} + \frac{M\dot{x}_2^2}{2} + \frac{m\dot{x}_3^2}{2} - \frac{k}{2}\left(x_1 - x_2\right)^2 - \frac{k}{2}(x_3 - x_2)^2, \tag{47}$$

wobei $x_{1,2,3}$ die Auslenkungen aus den Gleichgewichtspositionen beschreiben.

Diese Lagrangefunktion ist invariant unter der Vertauschung von x_1 und x_3. Wir können diese Transformation mit der folgenden Matrix beschreiben

$$\hat{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{48}$$

sodass

$$S \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}. \tag{49}$$

Wir können auch feststellen, dass $S^2 = 1$ erfüllt ist. Unserer Diskussion zur Folge, müssen die Eigenamplituden dann entweder symmetrisch oder antisymmetrisch unter die Transformation $x_1 \leftrightarrow x_3$ sein.

Wir fangen an mit der *antisymmetrischen* Amplitude. Diese Amplitude muss dann so aussehen

$$\vec{\xi}(t) = e^{i\omega t} \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix}. \tag{50}$$

Um $x(t)$ zu bestimmen, benutzen wir die Bewegungsgleichungen für x_1, die aus der Lagrangefunktion Gl. (47) folgen

$$m\ddot{x}_1 + k(x_1 - x_2) = 0, \tag{51}$$

setzen den Ansatz Gl. (50) ein und erhalten

$$\left(-\omega^2 m + k\right) x = 0. \tag{52}$$

Das bedeutet, dass die (normierte) Eigenfrequenz und die Eigenamplitude für die antisymmetrische Schwingung lauten

$$\omega_1^2 = \frac{k}{m}, \qquad \vec{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{53}$$

Der symmetrische Fall ist etwas komplizierter. In diesem Fall gibt eine Lösung, die man raten kann. Diese Lösung entspricht der freien Bewegung von drei Teilchen ohne Schwingungen. Dann

$$\omega_2 = 0, \qquad \vec{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{2m+M}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{54}$$

Die zweite symmetrische Schwingung muss dann so aussehen

$$\vec{\xi}(t) = e^{i\omega t} \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix}. \tag{55}$$

Es ist einfach, das Verhältnis zwischen x und y zu bestimmen, weil verschiedene Eigenamplituden orthogonal (mit der Matrix $\hat{m}$) sein müssen. Dann muss gelten

$$(1,1,1) \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} = 0. \tag{56}$$

Aus dieser Gleichung erhalten wir

$$y = -\frac{2m}{M} x, \tag{57}$$

sodass die Eigenamplitude lautet

$$\vec{a}_3 = \sqrt{\frac{M}{2m(2m+M)}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2m}{M} \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{58}$$

Um die Eigenfrequenz zu finden, benutzen wir Gl. (51) noch einmal und setzen dort $x_1 \to x$ und $x_2 \to y = -2m/Mx$ ein. Wir erhalten

$$\left[-m\omega^2 + k\left(1 + \frac{2m}{M}\right)\right] x = 0. \tag{59}$$

Es folgt

$$\omega_3^2 = \frac{k}{m}\,\frac{M+2m}{M}. \tag{60}$$

Um das letzte Beispiel zusammenzufassen: Wir haben alle Eigenfrequenzen und Eigenamplituden eines komplizierten Systems gefunden, ohne die Determinante zu berechnen. Die Symmetrien und die Bewegungsgleichungen haben dabei eine sehr wichtige Rolle gespielt.