Vorlesung 12: Eulerwinkel

Eine nützliche Parametrisierung des K-Systems erhält man durch die sogenannten Eulerwinkel. Um diese Winkel einzuführen, brauchen wir ein paar Definitionen.

Die Achsen des L-Systems bezeichnen wir als x, y, z, die Achsen des K-Systems als x_1, x_2, x_3. Die Nullpunkte der beiden Systeme fallen zusammen und seien am Punkt O. Das K-System ist relativ zum L-System gedreht (siehe Abb. 1).

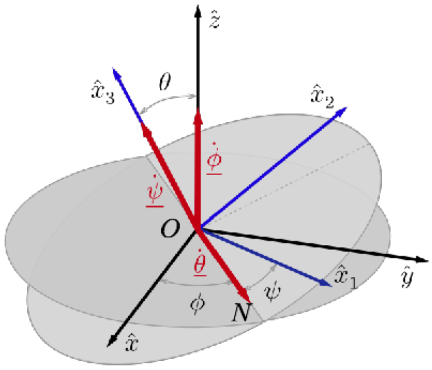

Abbildung 1: Konstruktion der Eulerwinkel.

Um diese Drehung zu beschreiben, nutzen wir die Erkenntnis, dass die (x_1, x_2)-Ebene die (x, y)-Ebene entlang einer "Knotenlinie" schneidet. Diese Linie bezeichnen wir als ON. Die Richtung dieser Linie ist durch den Vektor $\vec{e}_N$ geben; der lautet

$$\vec{e}_N = [\vec{e}_z \times \vec{e}_3]. \tag{1}$$

Wir führen drei Winkel (*Eulerwinkel*) ein, um die Lage des K-Systems vollständig zu beschreiben:

- den Winkel ϕ zwischen $\vec{e}_x$ und $\vec{e}_N$;
- den Winkel ψ zwischen $\vec{e}_N$ und $\vec{e}_1$;
- den Winkel θ zwischen $\vec{e}_z$ und $\vec{e}_3$.

Um das K-System in die richtige Lage zu rotieren, starten wir mit der Situation, dass die Achsen des K-Systems an denen des L-Systems ausgerichtet sind. Diese Situation entspricht $\phi = \psi = \theta = 0$. Dann fangen wir an, das K-System in einer bestimmten Reihenfolge um verschiedene Achsen zu rotieren, siehe auch Abb. 2.

Wir beginnen mit der Drehung des K-Systems um die z-Achse des L-Systems um den Winkel ϕ. Für einen Vektor $\vec{r}_L$ im L-System sind dessen Komponenten im rotierten K-System durch

$$\vec{r}_K = \hat{R}_\phi \vec{r}_L, \tag{2}$$

gegeben, wobei

$$\hat{R}_\phi = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

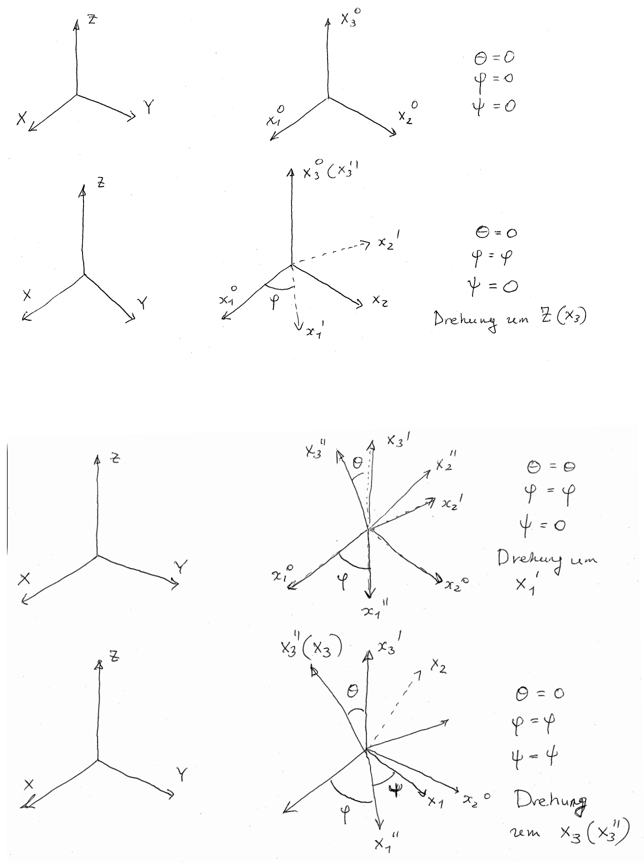

Abbildung 2: Die Reihenfolge der Drehungen.

Wir drehen als nächstes um die x_1-Achse um den Winkel θ und dann um die x_3-Achse um ψ. Dabei sind die Achsen der Drehungen jeweils die Achsen des K-Systems nach der ersten bzw. zweiten Drehung. Diese Drehungen beschreiben wir mit den beiden Matrizen

$$\hat{R}_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad \hat{R}_\psi = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Das bedeutet, dass das Endergebnis der Drehung des K-Systems

$$\vec{r}_K = \hat{R}_\psi \hat{R}_\theta \hat{R}_\phi \, \vec{r}_L \tag{5}$$

lautet. Sind also die Komponenten des Vektors $\vec{r}$ in L-System bekannt ($\vec{r}_L$), ergibt die linke Seite der Gleichung die Komponenten des Vektors $\vec{r}$ in K-System ($\vec{r}_K$). Beachten Sie, dass wir in diesem Fall das Koordinatensystem rotieren und nicht den Vektor selbst.

Als Beispiel betrachten wir den Vektor $\vec{e}_z$. Im L-System ist dieser Vektor durch $\vec{e}_z = (0, 0, 1)^T$ gegeben. Nach Gl. (5) sieht der Vektor $\vec{e}_z$ im K-System so aus

$$(\vec{e}_z)_K = \sin\theta \sin\psi \, \vec{e}_1 + \sin\theta \cos\psi \, \vec{e}_2 + \cos\theta \, \vec{e}_3. \tag{6}$$

Die Winkelgeschwindigkeit beschreibt infinitesimale Drehungen um bestimmte Achsen. Weil unsere Winkel ϕ, θ und ψ die Drehungen um $\vec{e}_z$, $\vec{e}_N$ und $\vec{e}_3$ entsprechen, schreiben wir

$$\vec{\Omega} = \dot{\phi}\vec{e}_z + \dot{\theta}\vec{e}_N + \dot{\psi}\vec{e}_3. \tag{7}$$

Wir wollen nun den Vektor $\vec{\Omega}$ vollständig in das K-System umschreiben. Wir wissen schon, wie $\vec{e}_z$ im K-System aussieht (siehe Gl. (6)) und $\vec{e}_3$ ist natürlich im K-System definiert. Den Vektor $\vec{e}_N$ können wir im K-System rekonstruieren, indem wir erkennen, dass nach der ersten Drehung $\vec{e}_N$ entlang der x_1-Achse liegt. Die zweite Drehung lässt $\vec{e}_N$ invariant (die Drehung ist gerade um $\vec{e}_N$) und die dritte ergibt

$$(\vec{e}_N)_K = \cos\psi\vec{e}_1 - \sin\psi\vec{e}_2. \tag{8}$$

Die Winkelgeschwindigkeit in K-System ist dann

$$\vec{\Omega} = \left(\dot{\theta}\cos\psi + \dot{\phi}\sin\theta\sin\psi\right)\vec{e}_1 + \left(\dot{\phi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi\right)\vec{e}_2 + \left(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi}\right)\vec{e}_3. \tag{9}$$

Wir können jetzt die Lagrangefunktion für die freie Bewegung des Kreisels schreiben. Wir wählen die Achsen des K-Systems als Hauptträgheitsachsen und schreiben die kinetische Energie als

$$T = \frac{I_1\Omega_1^2}{2} + \frac{I_2\Omega_2^2}{2} + \frac{I_3\Omega_3^2}{2}. \tag{10}$$

Die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit folgen aus Gl. (9). Im Falle eines symmetrischen Kreisels $I_2 = I_1 = I$, erhalten wir

$$L = T = \frac{I}{2}\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\sin^2\theta\right) + \frac{I_3}{2}\left(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta\right)^2. \tag{11}$$

Die Lagrangefunktion L ist von ψ und ϕ unabhängig; das heißt, dass die entsprechenden kanonischen Impulse erhalten sind. Wir finden

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}} = I_3\left(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta\right), \qquad p_\phi = I\dot{\phi}\sin^2\theta + p_\psi\cos\theta. \tag{12}$$

Für den freien Kreisel ist der Drehimpuls erhalten. Wir wählen die z-Achse des L-Systems entlang des Drehimpulses und erhalten folgende Gleichung im K-System

$$\vec{M} = M(\vec{e}_z)_K. \tag{13}$$

Andererseits können wir $\vec{M}$ durch $\vec{\Omega}$ direkt im K-System schreiben

$$\vec{M} = I\Omega_1\vec{e}_1 + I\Omega_2\vec{e}_2 + I_3\Omega_3\vec{e}_3. \tag{14}$$

Wir erhalten dann folgende Gleichung

$$M(\vec{e}_z)_K = I\Omega_1\vec{e}_1 + I\Omega_2\vec{e}_2 + I_3\Omega_3\vec{e}_3. \tag{15}$$

Wir benutzen Gl. (6), um $(\vec{e}_z)_K$ durch $\vec{e}_{1,2,3}$ auszudrücken und erhalten drei Gleichungen aus Gl. (15)

$$\begin{aligned} M\sin\theta\sin\psi &= I\left(\dot\phi\sin\theta\sin\psi + \dot\theta\cos\psi\right), \\ M\sin\theta\cos\psi &= I\left(\dot\phi\sin\theta\cos\psi - \dot\theta\sin\psi\right), \\ M\cos\theta &= I_3\left(\dot\phi\cos\theta + \dot\psi\right). \end{aligned} \tag{16}$$

Es folgt aus Gl. (12), dass

$$\left(\dot\phi\cos\theta + \dot\psi\right) = \frac{p_\psi}{I_3} \tag{17}$$

und, wenn wir diese Gleichung in der letzten Gleichung in Gl. (16) benutzen, erhalten wir

$$\cos\theta = \frac{p_\psi}{M}. \tag{18}$$

Das bedeutet, dass der Winkel θ (der Winkel zwischen dem Drehimpuls und der Symmetrieachse des Kreisels) während der Bewegung konstant bleibt.

Dann erhalten wir aus der ersten Gleichung von Gl. (16)

$$\dot\phi = \frac{M}{I}. \tag{19}$$

Der Winkel ϕ beschreibt die Drehung um die z-Achse (die Richtung der Drehimpulses); $\dot\phi$ ist dann die Geschwindigkeit der Präzession der Symmetrieachse des Kreisels um die Richtung des Drehimpulses $\vec{M}$. Letztendlich, laut Gl. (7), beschreibt

$$\Omega_3 = \dot\phi\cos\theta + \dot\psi \tag{20}$$

die Geschwindigkeit der Drehung des Körpers um die Symmetrieachse des Kreisels; Gl. (16) zufolge ist diese Winkelgeschwindigkeit konstant und durch

$$\Omega_3 = \frac{M\cos\theta}{I_3} \tag{21}$$

gegeben.