Vorlesung 11: Physik der starren Körper

Die Kinematik des starren Körpers: Unter einem "starren" Körper versteht man ein mechanisches System vieler Teilchen, deren Abstände festgelegt sind und sich nicht ändern können. Um starre Körper beschreiben zu können, ist es nützlich, zwei Koordinatensysteme einzuführen: ein Laborsystem (L-System) mit fixierten Achsen und ein weiteres Koordinatensystem, das mit der Körper starr verbunden ist (K-System). Der Ursprung des K-Systems ist dann fest mit einem Punkt O des Körpers assoziiert.

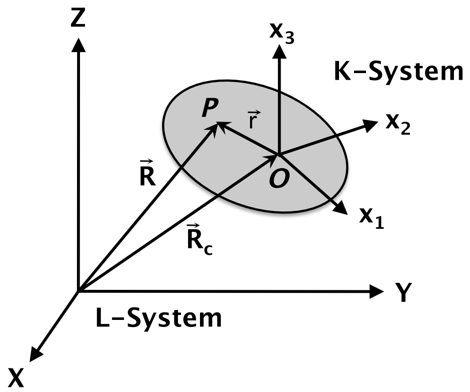

Abbildung 1: Koordinatensysteme zur Beschreibung eines starren Körpers.

Wir werden die Koordinaten im L-System mit großen und im K-System mit kleinen Buchstaben bezeichnen. Dementsprechend hat ein Punkt des starren Körpers den Ortsvektor $\vec{R}$ in L-System und den Ortsvektor $\vec{r}$ im K-System. Der Ortsvektor des Punkts O sei $\vec{R}_c$. Dann gilt

$$\vec{R} = \vec{R}_c + \vec{r}. \tag{1}$$

Weil die Abstände zwischen den Punkten des starren Körper fix sind, ist der Betrag von $\vec{r}$ fix. Das heißt, dass wenn sich $\vec{r}$ gemäß $\vec{r} \to \vec{r} + \mathrm{d}\vec{r}$ ändert, müssen $\vec{r}$ und $\mathrm{d}\vec{r}$ orthogonal zueinander sein

$$\vec{r} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0. \tag{2}$$

Die mögliche Bewegung ist dann eine Drehung und wir schreiben

$$\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}\vec{\phi} \times \vec{r}, \tag{3}$$

wobei $\mathrm{d}\vec{\phi} = \mathrm{d}\phi\,\vec{n}$ und $\mathrm{d}\phi$ der Drehwinkel sowie $\vec{n}$ die Drehachse sind. Wir berechnen dann die Geschwindigkeit eines Punkts des Körpers und erhalten

$$\frac{\mathrm{d}\vec{R}}{\mathrm{d}t} = \vec{V} = \vec{V}_c + \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \vec{V}_c + \vec{\Omega} \times \vec{r}, \qquad \vec{\Omega} = \frac{\mathrm{d}\vec{\phi}}{\mathrm{d}t}. \tag{4}$$

Die Größe $\vec{\Omega}$ beschreibt die Winkelgeschwindigkeit des Körpers im K-System, die Größe $\vec{V}_c$ die Geschwindigkeit des Punkts O in L-System.

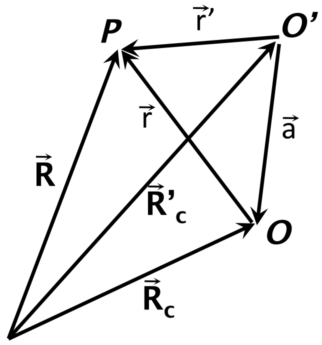

Abbildung 2: Die Verschiebung des Ursprungs.

Es ist natürlich möglich, verschiedene Systeme mit dem starren Körper zu assoziieren. Falls wir ein System K' wählen, dessen Ursprung relativ zum K-System um den Vektor $\vec{a}$ verschoben ist,

$$\vec{R}_c = \vec{R}_c' + \vec{a}, \tag{5}$$

finden wir die Geschwindigkeiten

$$\vec{V} = \vec{V}_c' + \vec{\Omega} \times \vec{a} + \vec{\Omega} \times \vec{r}, \tag{6}$$

sodass

$$\vec{V}_c = \vec{V}_c' + \vec{\Omega} \times \vec{a}. \tag{7}$$

Die kinetische Energie des starren Körpers und der Trägheitstensor: Um Mechanik zu machen, brauchen wir die kinetische und die potentielle Energie des starren Körpers. Wir werden die kinetische Energie des Körpers berechnen, indem wir den Körper als eine Menge von Punktteilchen betrachten. Die kinetische Energie ist dann die Summe der kinetischen Energien der Teilchen.

Wir schreiben die Geschwindigkeiten im L-System und wählen den Schwerpunkt des Körpers als den Ursprung des K-Systems. Dann gilt

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i = 0 \qquad \text{sodass} \qquad \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{R}_i = M\vec{R}_c, \qquad \text{wobei} \qquad M = \sum_{i=1}^{N} m_i, \tag{8}$$

Die kinetische Energie des Körpers ist dann

$$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \vec{V}_i^2}{2}, \tag{9}$$

wobei die Geschwindigkeit $\vec{V}_i$ des Punkts i

$$\vec{V}_i = \vec{V}_c + \vec{\Omega} \times \vec{r}_i \tag{10}$$

lautet. Wir berechnen dann $\vec{V}_i^2$

$$\vec{V}_i^2 = \vec{V}_c^2 + 2\vec{V}_c \cdot [\vec{\Omega} \times \vec{r}_i] + [\vec{\Omega} \times \vec{r}_i]^2 \tag{11}$$

und schreiben entsprechend die kinetische Energie des Körpers als die Summe dreier Terme

$$T = T_1 + T_2 + T_3 \tag{12}$$

wobei

$$\begin{aligned} T_1 &= \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \vec{V}_c^2}{2} = \frac{M\vec{V}_c^2}{2}, \\ T_2 &= \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{V}_c \cdot [\vec{\Omega} \times \vec{r}_i] = \vec{V}_c \cdot [\vec{\Omega} \times \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i] = 0, \\ T_3 &= \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i [\vec{\Omega} \times \vec{r}_i]^2}{2}. \end{aligned} \tag{13}$$

Beachten Sie, dass T_2 Null ist, weil der Ursprung des K-Systems im Schwerpunkt des Körpers liegt.

Wir können T_3 weiter vereinfachen

$$T_3 = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i [\vec{\Omega} \times \vec{r}_i]^2}{2} = \frac{\Omega_\alpha \Omega_\beta}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \, \epsilon_{\rho\alpha\alpha'} \epsilon_{\rho\beta\beta'} \vec{r}_{i,\alpha'} \vec{r}_{i,\beta'} \tag{14}$$

Für zwei Levi-Civita-Tensoren gilt

$$\epsilon_{\rho\alpha\alpha'} \epsilon_{\rho\beta\beta'} = \delta_{\alpha\beta}\delta_{\alpha'\beta'} - \delta_{\alpha\beta'}\delta_{\alpha'\beta}. \tag{15}$$

Wir setzen den Ausdruck Gl. (15) in Gl. (14) ein und erhalten

$$T_3 = \frac{I_{\alpha\beta}\Omega_\alpha\Omega_\beta}{2}, \tag{16}$$

wobei der Trägheitstensor des starren Körpers $I_{\alpha\beta}$ lautet

$$I_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\delta_{\alpha\beta} \vec{r}_i^2 - \vec{r}_{i,\alpha} \vec{r}_{i,\beta} \right). \tag{17}$$

Die kinetische Energie des starren Körpers

$$T = \frac{M\vec{V}_c^2}{2} + \frac{I_{\alpha\beta}\Omega_\alpha\Omega_\beta}{2} \tag{18}$$

besteht aus zwei Beiträgen – der kinetischen Energie des Körpers als Ganzes und der Rotationsenergie um den Schwerpunkt des Körpers. Diese Rotationsenergie beschreiben wir mit Hilfe den Trägheitstensors $I_{\alpha\beta}$.

Ein Trägheitstensor hat folgende Eigenschaften:

1. Es folgt aus der Definition, dass der Trägheitstensor symmetrisch ist
$$I_{\alpha\beta} = I_{\beta\alpha}. \tag{19}$$

2. Falls wir der Körper durch eine kontinuierliche Massendichte $\rho(\vec{r})$ charakterisieren, berechnen wir den Trägheitstensor als ein Integral
$$I_{\alpha\beta} = \int \mathrm{d}^3\vec{r}\,\rho(\vec{r})\left(\vec{r}^{\,2}\delta_{\alpha\beta} - \vec{r}_\alpha\vec{r}_\beta\right), \qquad M = \int \mathrm{d}^3\vec{r}\,\rho(\vec{r}). \tag{20}$$

3. Ein symmetrischer Tensor (oder eine Matrix) kann diagonalisiert werden, falls das richtige K-System gewählt wird. Der Tensor $I_{\alpha\beta}$ sieht dann so aus
$$I_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}. \tag{21}$$
Die Achsen eines solchen K-Systems nennen wir die "Hauptträgheitsachsen". Die Eigenwerte des Trägheitstensors $I_{1,2,3}$ bezeichnen wir als die Hauptträgheitsmomente.

4. Einen Körper mit unterschiedlichen I_1, I_2, I_3 nennt man "unsymmetrischen Kreisel". Ein Körper mit *zwei* gleichen Hauptträgheitsmomenten ist dann ein "symmetrischer Kreisel" und ein Körper mit gleichen $I_{1,2,3}$ ist ein Kugelkreisel.

5. Die gegebenen Formeln für den Trägheitstensor entsprechen der Situation, in der der Ursprung des K-Systems im Schwerpunkt des Körpers liegt. Wenn wir den Trägheitstensor in einem anderen, neuen System berechnen wollen, dann brauchen wir
$$I_{\alpha\beta}^{\mathrm{neu}} = \sum_{i=1}^{N} m_i\left(\vec{\rho}_i^{\,2}\delta_{\alpha\beta} - \vec{\rho}_{i,\alpha}\vec{\rho}_{i,\beta}\right). \tag{22}$$
Falls der Ortsvektor des Schwerpunkts im neuen Koordinatensystem $\vec{a}$ ist, gilt
$$\vec{\rho}_i = \vec{a} + \vec{r}_i, \qquad i = 1, \ldots, N. \tag{23}$$
Wir benutzen diesen Ausdruck in Gl. (22) und erhalten
$$I_{\alpha\beta}^{\mathrm{neu}} = I_{\alpha\beta} + M\left(\vec{a}^{\,2}\delta_{\alpha\beta} - a_\alpha a_\beta\right), \tag{24}$$
wobei wir benutzt haben, dass $\sum\limits_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i = 0$.

Als Beispiel berechnen wir den Trägheitstensor eines Zylinders mit homogener Massendichte. Ganz allgemein lohnt es sich, das K-System so zu wählen, dass wir die Symmetrie des Körpers berücksichtigen. Der Ursprung des K-Systems liegt im Schwerpunkt,

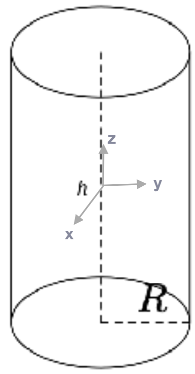

Abbildung 3: Der Zylinder.

die z-Achse des K-Systems ist entlang der Symmetrieachse des Zylinders und die x, y-Achsen sind beliebig gewählt. Die Massendichte bezeichnen wir mit μ, die Höhe des Zylinders mit h und der Radius des Zylinders ist R. Dann gilt

$$I_{\alpha\beta} = \mu \int\limits_{-h/2}^{h/2} \mathrm{d}z \int\limits_{x^2+y^2<R^2} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \left(\delta_{\alpha\beta}(x^2+y^2+z^2) - r_\alpha r_\beta\right). \tag{25}$$

Um die Integration zu vereinfachen, sollten wir Zylinderkoordinaten wählen. Wir schreiben

$$\vec{r} = (x, y, z) = (\rho\cos\phi, \rho\sin\phi, z), \qquad \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi. \tag{26}$$

Es ist einfach zu sehen, dass alle nicht-diagonalen Beiträge zum Trägheitstensor Null sind. Z.B.

$$I_{xy} = \mu \int\limits_{-h/2}^{h/2} \mathrm{d}z \int\limits_0^R \mathrm{d}\rho\,\rho \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi\left[-\rho^2\cos\phi\sin\phi\right] = 0, \tag{27}$$

weil

$$\int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi\cos\phi\sin\phi = 0. \tag{28}$$

Ähnlich

$$I_{xz} = \mu \int\limits_{-h/2}^{h/2} \mathrm{d}z \int\limits_0^R \mathrm{d}\rho\,\rho \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi\left[-z\rho\cos\phi\right] = 0, \tag{29}$$

und so weiter.

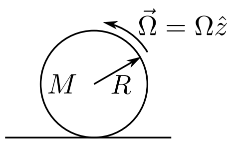

Abbildung 4: Die Bewegung eines Zylinders auf einer Ebene.

Wir müssen dann nur diagonale Beiträge berechnen. Wir fangen mit I_{zz} an. Dieser Beitrag lautet

$$\begin{aligned} I_{zz} &= \mu \int\limits_{-h/2}^{h/2} \mathrm{d}z \int\limits_0^R \mathrm{d}\rho\, \rho \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \left(x^2 + y^2 + z^2 - z^2\right) \\ &= \mu \int\limits_{-h/2}^{h/2} \mathrm{d}z \int\limits_0^R \mathrm{d}\rho\, \rho \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi\, \rho^2 = \frac{2\pi\mu h R^4}{4} = \frac{MR^2}{2}, \end{aligned} \tag{30}$$

wobei die Masse des Zylinders M durch

$$M = \mu\pi R^2 h \tag{31}$$

gegeben ist.

Wir berechnen dann I_{xx}. Es gilt

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \mu \int\limits_{-h/2}^{h/2} \mathrm{d}z \int\limits_0^R \mathrm{d}\rho\, \rho \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \left(x^2 + y^2 + z^2 - x^2\right) \\ &= \mu \int\limits_{-h/2}^{h/2} \mathrm{d}z \int\limits_0^R \mathrm{d}\rho\, \rho \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \left(z^2 + \rho^2 \sin^2\phi\right) = \mu \int\limits_{-h/2}^{h/2} \mathrm{d}z \int\limits_0^R \mathrm{d}\rho\, \rho\, 2\pi \left(z^2 + \frac{\rho^2}{2}\right) \\ &= \frac{M}{4}\left(R^2 + \frac{h^2}{3}\right). \end{aligned} \tag{32}$$

Offensichtlich gilt wegen der Zylindersymmetrie $I_{yy} = I_{xx}$.

Als Beispiel schreiben wir die kinetische Energie des Zylinders, der auf einer Ebene ohne Rutschen rollt, siehe Abb. 4. Die Drehgeschwindigkeit ist Ω. Die kinetische Energie ist durch die Summe der kinetischen Energie des Körpers als Ganzes und der kinetischen Energie der Drehung gegeben, siehe Gl. (18),

$$T = \frac{MV^2}{2} + \frac{I_{zz}\Omega^2}{2}. \tag{33}$$

Weil der Zylinder ohne Rutschen rollt, ist die Geschwindigkeit des Schwerpunkts durch

$$V = \Omega R \tag{34}$$

gegeben. Wir benutzen $I_{zz} = MR^2/2$ und erhalten

$$T = \frac{3MR^2\Omega^2}{4}. \tag{35}$$

Der Drehimpuls des starren Körpers und die freie Bewegung: Wir werden jetzt den Drehimpuls des starren Körpers diskutieren. Der Drehimpuls ist wichtig, weil er für eine kräftefreie Bewegung eine Erhaltungsgröße ist. Der Gesamtdrehimpuls des Körpers ist die Summe der Drehimpulse der Massenpunkte. Wir berechnen den Drehimpuls im Ruhesystem des Schwerpunkts des Körpers (sodass $\vec{V}_c = \vec{0}$). Es gilt

$$\vec{p}_i = m_i\vec{v}_i = m_i[\vec{\Omega} \times \vec{r}_i]. \tag{36}$$

Dann

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i[\vec{r}_i \times [\vec{\Omega} \times \vec{r}_i]]. \tag{37}$$

Wir können das Vektorprodukt vereinfachen

$$[\vec{r}_i \times [\vec{\Omega} \times \vec{r}_i]] = \vec{\Omega}\, \vec{r}_i^{\,2} - \vec{r}_i \left(\vec{\Omega} \cdot \vec{r}_i\right). \tag{38}$$

Dann erhalten wir

$$\vec{M}_\alpha = I_{\alpha\beta}\vec{\Omega}_\beta \tag{39}$$

oder, falls wir den Trägheitstensor als Matrix betrachten,

$$\vec{M} = \hat{I}\, \vec{\Omega}. \tag{40}$$

Wir wollen nun untersuchen, wie sich der freie starre Körper bewegt. In diesem Fall ist der Schwerpunkt des Körpers in Ruhe und der Drehimpuls ist erhalten. Im Falle eines Kugelkreisels ist die Matrix $\hat{I}$ proportional zur Einheitsmatrix. Dass bedeutet, dass

$$\vec{M} = I\vec{\Omega}, \qquad \Rightarrow \vec{\Omega} = \frac{\vec{M}}{I}. \tag{41}$$

Der freie Kugelkreisel dreht sich also um die Achse $\vec{M}$ mit der Winkelgeschwindigkeit Ω.

Im Falle eines symmetrischen Kreisels ist die Situation komplizierter. Wir können die Achse des K-Systems so wählen, dass der Trägheitstensor diagonal ist. Dann gilt im K-System

$$\vec{M} = \hat{I}\vec{\Omega}, \qquad \hat{I} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}. \tag{42}$$

Weil der Vektor $\vec{M}$ erhalten ist, können wir die Achsen so wählen, dass die Achse x_2 immer in der Ebene liegt, die aus der Symmetrieachse des Körpers und dem Vektor $\vec{M}$ aufgespannt wird. Die Achse x_1 wollen wir dann senkrecht zu dieser Ebene wählen.

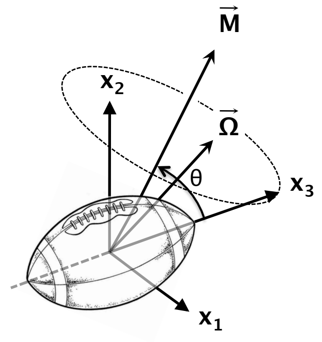

Abbildung 5: Ein symmetrischer Kreisel.

Diese Konstruktion bedeutet, dass die Projektion des Drehimpuls auf die x_1-Achse Null ist. Dass bedeutet dann, dass $\Omega_1 = 0$ ist, und es folglich keine Drehung in der (x_3, x_2)-Ebene gibt. Wenn wir den Winkel zwischen $\vec{M}$ und der Symmetrieachse des Körpers als θ bezeichnen, ist dieser Winkel konstant. Wir schreiben dann

$$M_2 = M \sin\theta = I\Omega_2, \qquad M_3 = M\cos\theta = I_3\Omega_3, \tag{43}$$

sodass

$$\Omega_2 = \frac{M\sin\theta}{I}, \qquad \Omega_3 = \frac{M\cos\theta}{I_3}. \tag{44}$$

Um die Art der Bewegung besser zu verstehen, schreiben wir

$$\vec{\Omega} = \Omega_M \vec{e}_M + \Omega_3 \vec{e}_3, \qquad \vec{e}_M = \frac{\vec{M}}{M}, \tag{45}$$

wobei Ω_M die Geschwindigkeit der Drehung um die Achse des Drehimpuls $\vec{M}$ beschreibt und Ω_3 die Drehung um die Symmetrieachse des Körpers (ohne die Position des Körpers im Raum zu ändern). In diesem Sinne beschreibt Ω_3 "interne" und Ω_M "externe" Drehungen.

Um Ω_M zu erhalten, multiplizieren wir Gl. (45) mit $\vec{e}_2$. Es folgt

$$\Omega_2 = \Omega_M \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_M = \Omega_M \sin\theta. \tag{46}$$

Wir benutzen dann den Ausdruck für Ω_2 aus Gl. (44) und erhalten

$$\Omega_M = \frac{M}{I}. \tag{47}$$

Der Kreisel präzediert mit der Winklegeschwindigkeit Ω_M um die Richtung des Drehimpulses.

Euler-Gleichungen: Wir können die gleiche physikalische Frage auch anders untersuchen. Wie vorher betrachten wir einen freien Kreisel. Der Drehimpuls des Kreisels ist erhalten. Das heißt, dass

$$\frac{\mathrm{d}\vec{M}}{\mathrm{d}t} = 0. \tag{48}$$

Wir können aber den Drehimpuls des Kreisels im K-System als $\vec{M} = M_i \vec{e}_i$ schreiben. Weil das K-System rotiert, sind die Komponenten M_i keine Konstanten. In der Tat, gilt

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{M} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[M_i \vec{e}_i\right] = \vec{e}_i \, \frac{\mathrm{d}M_i}{\mathrm{d}t} + M_i \frac{\mathrm{d}\vec{e}_i}{\mathrm{d}t}. \tag{49}$$

Die Zeitableitung des Vektors $\vec{e}_i$ lautet

$$\frac{\mathrm{d}\vec{e}_i}{\mathrm{d}t} = [\vec{\Omega} \times \vec{e}_i]. \tag{50}$$

Wir benutzen den Ausdruck Gl. (50) in Gl. (49), multiplizieren Gl. (49) mit $\vec{e}_i$ und erhalten

$$0 = \frac{\mathrm{d}M_i}{\mathrm{d}t} + M_j \vec{e}_i \cdot [\vec{\Omega} \times \vec{e}_j]. \tag{51}$$

Wir schreiben $\vec{\Omega} = \Omega_i \vec{e}_i$ und benutzen

$$\vec{e}_j \cdot [\vec{e}_l \times \vec{e}_k] = \epsilon_{jlk}, \tag{52}$$

um aus Gl. (51) Folgendes zu erhalten

$$\frac{\mathrm{d}M_i}{\mathrm{d}t} + \epsilon_{ilj}\Omega_l M_j = 0. \tag{53}$$

Wir wählen dann das K-System so, dass der Trägheitstensor diagonal ist, sodass $M_i = I_i \Omega_i$, und erhalten aus Gl. (53)

$$\frac{\mathrm{d}\Omega_1}{\mathrm{d}t} = \frac{I_2 - I_3}{I_1}\Omega_2\Omega_3, \qquad \frac{\mathrm{d}\Omega_2}{\mathrm{d}t} = \frac{I_3 - I_1}{I_2}\Omega_1\Omega_3, \qquad \frac{\mathrm{d}\Omega_3}{\mathrm{d}t} = \frac{I_1 - I_2}{I_3}\Omega_1\Omega_2. \tag{54}$$

Diese Gleichungen nennt mann die *Euler-Gleichungen.*

Wir lösen jetzt diese Gleichungen für den Fall eines Kugelkreisels und eines symmetrischen Kreisels. Für Kugelkreisel gilt $I_1 = I_2 = I_3$, sodass $\mathrm{d}\vec{\Omega}/\mathrm{d}t = 0$. D.h. dass $\vec{\Omega}$ zeitunabhängig ist.

Im Fall eines symmetrischen Kreisels haben wir $I_1 = I_2 \neq I_3$. Dann gilt

$$\frac{\mathrm{d}\Omega_1}{\mathrm{d}t} = \frac{I_1 - I_3}{I_1}\Omega_2\Omega_3, \qquad \frac{\mathrm{d}\Omega_2}{\mathrm{d}t} = -\frac{I_1 - I_3}{I_1}\Omega_1\Omega_3, \qquad \frac{\mathrm{d}\Omega_3}{\mathrm{d}t} = 0. \tag{55}$$

Demzufolge ist Ω_3 zeitunabhängig und falls wir die Notation

$$\gamma = \frac{I_1 - I_3}{I_1}\Omega_3 \tag{56}$$

einführen, lauten die Gleichungen für $\Omega_{1,2}$

$$\frac{\mathrm{d}\Omega_1}{\mathrm{d}t} = \gamma\Omega_2, \qquad \frac{\mathrm{d}\Omega_2}{\mathrm{d}t} = -\gamma\Omega_1. \tag{57}$$

Wir leiten dann die erste Gleichung nach der Zeit ab, benutzen die zweite Gleichung, um $\mathrm{d}\Omega_2/\mathrm{d}t$ zu eliminieren und erhalten

$$\frac{\mathrm{d}^2\Omega_1}{\mathrm{d}t^2} + \gamma^2\Omega_1 = 0. \tag{58}$$

Die Lösung dieser Gleichung ist dann

$$\Omega_1 = \Omega_0 \cos(\gamma t + \phi) \tag{59}$$

und

$$\Omega_2 = -\Omega_0 \sin(\gamma t + \phi). \tag{60}$$

Dass bedeutet das

$$\Omega_1^2 + \Omega_2^2 = \Omega_0^2 \tag{61}$$

zeitunabhängig ist. Weil Ω_3 auch zeitunabhängig ist, präzediert $\vec{\Omega}$ um die Symmetrieachse des Kreisels mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\gamma = \frac{I_1 - I_3}{I_1}\Omega_3. \tag{62}$$

Aus der Relation zwischen $\vec{M}$ und $\vec{\Omega}$,

$$M_1 = I_1\Omega_1, \qquad M_2 = I_1\Omega_2, \qquad M_3 = I_3\Omega_3 \tag{63}$$

folgt, dass der Vektor $\vec{M}$ auch um die Symmetrieachse des Kreisels präzediert. Das ist die K-System Beschreibung der Präzession der Symmetrieachse des Kreisels um den Vektor des Drehimpulses im L-System, die wir voher schon diskutiert haben.