

Vorlesung 10: Kanonische Transformationen, Phasenraum, Satz von Liouville

Kanonische Transformationen und erzeugende Funktion: Im Hamilton-Formalismus sind Koordinaten und Impulse unabhängige Variablen. Deswegen entsteht die Möglichkeit, eine Variablentransformation zu machen, die Impulse und Koordinaten mischt. Wir werden sehen, dass diese Möglichkeit ein großer Vorteil der Hamiltonschen Formulierung der Mechanik ist.

Angenommen, die Koordinaten q und Impulse p sind unsere ursprünglichen kanonischen Variablen. Wir wollen aber andere Variablen, Q und P , benutzen. Der Zusammenhang zwischen alten und neuen Variablen lautet

$$Q = Q(q, p, t), \quad P = P(q, p, t). \quad (1)$$

Wir nennen eine solche Transformation “kanonisch”, falls die Bewegungsgleichungen für Q und P die Hamiltonsche Form haben

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\partial K}{\partial P}, \quad \frac{dP}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial Q}, \quad (2)$$

wobei K die neue Hamiltonfunktion ist.

Wir wollen jetzt herausfinden, wann eine Transformation kanonisch ist. Hierzu können wir die Wirkung entweder mit den alten oder mit den neuen Variablen berechnen

$$S_A = \int (p dq - H dt), \quad S_N = \int (P dQ - K dt). \quad (3)$$

Diese zwei Wirkungen müssen nicht unbedingt gleich sein, aber, weil die physikalischen Trajektorien identisch sein sollen, muss die Variation der beiden Wirkungen simultan Null sein. Dann muss gelten

$$0 = \delta \int (p dq - H dt - P dQ + K dt). \quad (4)$$

Diese Gleichung können wir erfüllen, indem der Integrand eine totale Ableitung einer Funktion von q und Q (die man *erzeugende Funktion* nennt) ist, also

$$dF(q, Q, t) = p dq - H dt - P dQ + K dt. \quad (5)$$

Nach der Integration bekommt man dann $F(q(t_{1,2}), Q(t_{1,2}), t_{1,2})$ und die Variationen dieser Funktionen verschwinden, weil $\delta q(t_{1,2})$ und $\delta Q(t_{1,2})$ Null sind.

Aus Gl. (5) folgt

$$\frac{\partial F(q, Q, t)}{\partial q} = p, \quad \frac{\partial F(q, Q, t)}{\partial Q} = -P, \quad \frac{\partial F(q, Q, t)}{\partial t} = K - H. \quad (6)$$

Invarianz der Poisson-Klammern: Die Poisson-Klammern sind invariant unter kanonischen Transformationen. D.h., für zwei beliebige Funktionen $F_{1,2}$ gilt

$$\{F_1, F_2\}_{p,q} = \{F_1, F_2\}_{P,Q}, \quad (7)$$

wobei $\{\dots\}_{x,y}$ die Poisson-Klammern bezeichnet, die wir mit Hilfe der Ableitungen nach den Variablen x, y berechnen. Um diese Aussage zu beweisen, fangen wir mit den elementaren Klammern an. Weil zum Beispiel

$$\{Q, P\}_{P,Q} = -1 \quad (8)$$

gilt, muss auch

$$\{Q, P\}_{p,q} = -1 \quad (9)$$

gelten. Um das zu überprüfen, schreiben wir

$$\{Q, P\}_{p,q} = \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial q} - \frac{\partial P}{\partial p} \frac{\partial Q}{\partial q}. \quad (10)$$

Weil die Variablen Q und P kanonisch sind, existiert eine Funktion F , deren Ableitungen p und P ergeben

$$p = \left. \frac{\partial F}{\partial q} \right|_Q, \quad P = - \left. \frac{\partial F}{\partial Q} \right|_q. \quad (11)$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial P}{\partial q} \right|_p &= - \left. \frac{\partial^2 F}{\partial Q \partial Q} \frac{\partial Q}{\partial q} \right|_p - \frac{\partial^2 F}{\partial Q \partial q} \\ \left. \frac{\partial P}{\partial p} \right|_q &= - \frac{\partial^2 F}{\partial Q \partial Q} \frac{\partial Q}{\partial p} - \left. \frac{\partial^2 F}{\partial Q \partial q} \frac{\partial q}{\partial p} \right|_q = - \frac{\partial^2 F}{\partial Q^2} \frac{\partial Q}{\partial p}. \end{aligned} \quad (12)$$

Wir benutzen diese Ausdrücke in Gl. (10) und erhalten

$$\{Q, P\}_{p,q} = \frac{\partial Q}{\partial p} \left[- \frac{\partial^2 F}{\partial Q^2} \frac{\partial Q}{\partial q} - \frac{\partial^2 F}{\partial Q \partial q} \right] - \left[- \frac{\partial^2 F}{\partial Q^2} \frac{\partial Q}{\partial p} \right] \frac{\partial Q}{\partial q} = - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial^2 F}{\partial Q \partial q} = -1. \quad (13)$$

Der letzte Schritt folgt aus

$$1 = \frac{\partial}{\partial p} p = \frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial F}{\partial q} = \frac{\partial^2 F}{\partial q^2} \frac{\partial q}{\partial p} + \frac{\partial^2 F}{\partial Q \partial q} \frac{\partial Q}{\partial p} = \frac{\partial^2 F}{\partial Q \partial q} \frac{\partial Q}{\partial p}. \quad (14)$$

Die Gleichung (13) ist das gewünschte Ergebnis.

Wir können dann den allgemeinen Fall Gl. (7) untersuchen. Wir fangen an mit

$$\{F_1, F_2\}_{p,q} = \frac{\partial F_1}{\partial p} \frac{\partial F_2}{\partial q} - \frac{\partial F_1}{\partial q} \frac{\partial F_2}{\partial p}, \quad (15)$$

und schreiben

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_2}{\partial q} &= \frac{\partial F_2}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial q} + \frac{\partial F_2}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial q}, \\ \frac{\partial F_2}{\partial p} &= \frac{\partial F_2}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial p} + \frac{\partial F_2}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial p}, \end{aligned} \quad (16)$$

sodass

$$\begin{aligned}
\{F_1, F_2\}_{p,q} &= \frac{\partial F_1}{\partial p} \left(\frac{\partial F_2}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial q} + \frac{\partial F_2}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial q} \right) - \frac{\partial F_1}{\partial q} \left(\frac{\partial F_2}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial p} + \frac{\partial F_2}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial p} \right) \\
&= \frac{\partial F_2}{\partial Q} \left(\frac{\partial F_1}{\partial p} \frac{\partial Q}{\partial q} - \frac{\partial F_1}{\partial q} \frac{\partial Q}{\partial p} \right) + \frac{\partial F_2}{\partial P} \left(\frac{\partial F_1}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial q} - \frac{\partial F_1}{\partial q} \frac{\partial P}{\partial p} \right) \\
&= \frac{\partial F_2}{\partial Q} \{F_1, Q\}_{p,q} + \frac{\partial F_2}{\partial P} \{F_1, P\}_{p,q}.
\end{aligned} \tag{17}$$

Es ist nützlich, diese Formel für $F_1 = Q$ oder $F_1 = P$ zu verwenden. Falls $F_1 = Q$ ist, erhalten wir

$$\{Q, F_2\}_{p,q} = \frac{\partial F_2}{\partial Q} \{Q, Q\}_{p,q} + \frac{\partial F_2}{\partial P} \{Q, P\}_{p,q} = -\frac{\partial F_2}{\partial P}, \tag{18}$$

weil $\{Q, Q\} = 0$ und $\{Q, P\} = -1$ sind. Ähnlich,

$$\{P, F_2\}_{p,q} = \frac{\partial F_2}{\partial Q} \{P, Q\}_{p,q} + \frac{\partial F_2}{\partial P} \{P, P\}_{p,q} = \frac{\partial F_2}{\partial Q}, \tag{19}$$

Wir benutzen die Ergebnisse in Gl. (18,19) in Gl. (17) und erhalten

$$\{F_1, F_2\}_{p,q} = \frac{\partial F_2}{\partial Q} \frac{\partial F_1}{\partial P} - \frac{\partial F_2}{\partial P} \frac{\partial F_1}{\partial Q} = \{F_1, F_2\}_{P,Q}. \tag{20}$$

Der harmonische Oszillator und kanonische Transformationen: Kanonische Transformationen geben uns die Möglichkeit, ganz verschiedene Variablen zu wählen, um mechanische Systemen zu beschreiben. Als Beispiel betrachten wir den harmonischen Oszillator. Die Lagrangefunktion lautet bekannterweise

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{m\omega^2 x^2}{2}. \tag{21}$$

Die Hamiltonfunktion ist dann

$$H = \dot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - L = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}, \tag{22}$$

wobei wir benutzt haben, dass

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}. \tag{23}$$

Wir führen nun neue Variablen ein. Sie lauten

$$a = \frac{m\omega x + ip}{\sqrt{2m\omega}} e^{i\omega t}, \quad a^\dagger = \frac{m\omega x - ip}{\sqrt{2m\omega}} e^{-i\omega t}, \tag{24}$$

Wir können dann die Poisson-Klammer der Variablen $a, a^\dagger$ berechnen. Wir erhalten

$$\{a, a^\dagger\} = \left\{ \frac{m\omega x + ip}{\sqrt{2m\omega}} e^{i\omega t}, \frac{m\omega x - ip}{\sqrt{2m\omega}} e^{-i\omega t} \right\} = \frac{1}{2} (-i\{x, p\} + i\{p, x\}) = i. \tag{25}$$

Falls wir

$$Q = a, \quad ia^\dagger = P \quad (26)$$

als unsere neue Koordinate und Impuls nehmen, erhalten wir

$$\{P, Q\} = 1. \quad (27)$$

Die Transformation $x, p \rightarrow Q, P$ muss dann kanonisch sein.

Um die neue Hamiltonfunktion zu konstruieren, brauchen wir die erzeugende Funktion $F(x, Q, t)$. Diese Funktion hat folgende Eigenschaften

$$p = \left. \frac{\partial F(x, Q, t)}{\partial x} \right|_Q, \quad P = - \left. \frac{\partial F(x, Q, t)}{\partial Q} \right|_x. \quad (28)$$

Als ersten Schritt drücken wir p durch x und $Q = a$ aus. Wir erhalten

$$p = im\omega x - ie^{-i\omega t} \sqrt{2m\omega} Q = \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_Q. \quad (29)$$

Wir integrieren diese Gleichung und erhalten

$$F = \frac{im\omega x^2}{2} - ie^{-i\omega t} \sqrt{2m\omega} Qx + F_1(Q, t), \quad (30)$$

wobei $F_1(Q)$ eine beliebige Funktion ist, die nur von Q und t abhängig ist. Um diese Funktion zu bestimmen, berechnen wir $P = -\partial F/\partial Q$. Wir erhalten

$$P = ie^{-i\omega t} \sqrt{2m\omega} x - \frac{dF_1}{dQ}. \quad (31)$$

Weil $P = ia^\dagger$ ist, können wir P durch x und Q ausdrücken. Wir erhalten

$$P = i\sqrt{2m\omega} x e^{-i\omega t} - iQ e^{-2i\omega t}. \quad (32)$$

Wir vergleichen Gln. (31,32) und erkennen, dass

$$\frac{dF_1}{dQ} = iQ e^{-2i\omega t}. \quad (33)$$

Es folgt

$$F_1(Q) = \frac{iQ^2}{2} e^{-2i\omega t}. \quad (34)$$

Die komplette erzeugende Funktion lautet

$$F(x, Q, t) = \frac{im\omega x^2}{2} - ie^{-i\omega t} \sqrt{2m\omega} Qx + \frac{iQ^2}{2} e^{-2i\omega t}. \quad (35)$$

Wir können jetzt mit Hilfe dieser Funktion die neue Hamiltonfunktion berechnen. Wir benutzen Gl. (6) und schreiben

$$K = H + \frac{\partial F}{\partial t} = H - \omega e^{-i\omega t} \sqrt{2m\omega} Qx + \omega Q^2 e^{-2i\omega t}. \quad (36)$$

Wir wollen die neue Hamiltonfunktion K durch Q und P ausdrücken. Wir benutzen

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} = \frac{(m\omega x + ip)(m\omega x - ip)}{2m} = \omega aa^\dagger = -i\omega PQ \quad (37)$$

und

$$\omega Q^2 e^{-2i\omega t} - \omega e^{i\omega t} \sqrt{2m\omega} Qx = \omega Q \left(Qe^{-2i\omega t} - e^{i\omega t} \sqrt{2m\omega} x \right) = i\omega QP, \quad (38)$$

und erhalten

$$K = 0. \quad (39)$$

Die Bewegungsgleichungen sind dann

$$\frac{dQ}{dt} = \{K, Q\} = 0, \quad \frac{dP}{dt} = \{K, P\} = 0. \quad (40)$$

Die Lösungen sind trivial; sowohl Q als auch P sind Konstanten, die wir als Q_0 und P_0 bezeichnen.

Um die Zeitabhängigkeit von x zu bestimmen, drücken wir x durch Q und P aus und erhalten

$$x = \frac{1}{\sqrt{2m\omega}} (Q_0 e^{-i\omega t} - iP_0 e^{i\omega t}). \quad (41)$$

Wir suchen eine reelle Lösung. Deswegen schreiben wir $Q_0 = A\sqrt{\frac{m\omega}{2}}e^{-i\phi_0}$ und $-iP_0 = A\sqrt{\frac{m\omega}{2}}e^{i\phi_0}$ und erhalten

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi_0). \quad (42)$$

Zeitevolution als kanonische Transformation: Interessanterweise können wir die Zeitentwicklung eines mechanischen Systems als kanonische Transformation betrachten. Wir betrachten die Wirkung S als eine Funktion von Anfangs- und End-Koordinaten eines Teilchens und der Zeit, die das Teilchen braucht, um die End-Koordinaten zu erreichen. Wir schreiben

$$S = S(q(t_2), q(t_1), t_2, t_1). \quad (43)$$

Wir haben schon gesehen, dass dS im Allgemeinen als

$$dS = p dq - H dt \quad (44)$$

geschrieben werden kann. Das heißt, wenn wir die Änderung der Wirkung betrachten, die durch die Veränderung von $q(t_2)$, $q(t_1)$ und $t_{1,2}$ auftritt, erhalten wir

$$dS = p(t_2) dq(t_2) - p(t_1) dq(t_1) - H(t_2) dt_2 + H(t_1) dt_1. \quad (45)$$

Wir schreiben dann $t_2 = \tau + t$, $t_1 = t$ und halten τ fest. Dann ist $dt_2 = dt$ und $dt_1 = dt$. Die Variation der Wirkung lautet dann

$$dS = p(t_2) dq(t_2) - p(t_1) dq(t_1) - (H(t_2) - H(t_1))dt. \quad (46)$$

Das heißt

$$p(t_2) = \frac{\partial S}{\partial q(t_2)}, \quad p(t_1) = -\frac{\partial S}{\partial q(t_1)}, \quad H(t_2) - H(t_1) = -\frac{\partial S}{\partial t}. \quad (47)$$

Daraus folgt, dass wir die Wirkung S als die erzeugende Funktion einer kanonischen Transformation betrachten können. Diese "Transformation" drückt die Koordinaten und Impulsen zum Zeitpunkt $t + \tau$ durch die Koordinaten und Impulse zum Zeitpunkt t aus

$$p(t), q(t) \rightarrow p(t + \tau), q(t + \tau). \quad (48)$$

Dementsprechend kann man die die Zeitevolution eines mechanisches System als eine Reihe von kanonischen Transformationen interpretieren.

Der Phasenraum: Wir betrachten ein mechanisches System mit n Freiheitsgraden. Falls wir den Hamilton-Formalismus zur Beschreibung des Systems verwenden, beschreiben wir den Zustand des Systems zu jedem Zeitpunkt durch die Werte von n Koordinaten und n Impulsen. Wir können dann einen Vektor $(q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n)$ einführen, um den Zustand des Systems zu beschreiben. Dieser Vektor ist Element eines $2n$ -dimensionalen Raumes, den wir als *Phasenraum* bezeichnen. Die Zeitentwicklung des System erzeugt eine Kurve in dem Phasenraum.

Wir diskutieren einige Beispiele. Im Fall einer freien Bewegung eines Teilchens mit der Masse m gilt

$$q = \frac{p}{m}t + q_0. \quad (49)$$

Dies ist eine Gerade im Phasenraum.

Im Fall des harmonischen Oszillators gilt

$$q = A \cos(\omega t + \phi), \quad p = -\omega A m \sin(\omega t + \phi). \quad (50)$$

Damit erhalten wir

$$\frac{q^2(t)}{A^2} + \frac{p(t)^2}{A^2 m^2 \omega^2} = 1. \quad (51)$$

Die entsprechende Kurve im Phasenraum ist eine Ellipse.

Wir können im Phasenraum verschiedene Volumen berechnen, z.B. für einen zweidimensionalen Phasenraum berechnen wir

$$V = \int_S dp dq, \quad (52)$$

wobei S das Integrationsgebiet definiert.

Was passiert mit dem Volumen, falls wir eine kanonische Transformation $(p, q) \rightarrow (P, Q)$ machen? Dann erhalten wir

$$V = \int_S dp \, dq = \int_{S'} \frac{\partial(p, q)}{\partial(P, Q)} dP \, dQ. \quad (53)$$

Die Jacobi-Determinante der Transformation ist für kanonische Transformationen trivial

$$\frac{\partial(p, q)}{\partial(P, Q)} = \det \begin{vmatrix} \frac{\partial p}{\partial P} & \frac{\partial q}{\partial P} \\ \frac{\partial p}{\partial Q} & \frac{\partial q}{\partial Q} \end{vmatrix} = \frac{\partial p}{\partial P} \frac{\partial q}{\partial Q} - \frac{\partial p}{\partial Q} \frac{\partial q}{\partial P} = \{p, q\}_{P, Q} = \{P, Q\} = 1. \quad (54)$$

Es folgt, dass Phasenraumvolumen invariant unter kanonischen Transformationen sind

$$V = \int_S dp \, dq = \int_{S'} dP \, dQ. \quad (55)$$

Satz von Liouville: Wir betrachten ein mechanisches System. Die Zustände des Systems zur Zeit t_1 bilden ein Gebiet S im Phasenraum. Das Volumen des Systems ist dann

$$V(t_1) = \int_S dp \, dq. \quad (56)$$

Der Satz von Liouville besagt nun, dass das Volumen des Systems invariant unter Zeitevolution bleibt

$$V(t_2) = V(t_1). \quad (57)$$

Diese Aussage folgt aus

- der Invarianz der Phasenraumvolumen unter kanonische Transformationen und
- der Möglichkeit, die Zeitevolution mechanischer Systemen als eine kanonische Transformation zu beschreiben.