Vorlesung 9: Hamiltonschen Gleichungen

1. Die Hamiltonsche Funktion: Bisher haben wir mechanische Systeme mit Lagrangefunktionen beschrieben, aber es gibt auch andere Möglichkeiten. Wir werden nun die sogenannte *Hamiltonsche Funktion* und die *Hamiltonschen Gleichungen* diskutieren. Dieser alternative Zugang ist wichtig, weil er mehr Möglichkeiten für Variablentransformationen bietet und dies genutzt werden kann, um die Beschreibung des Systems zu vereinfachen.

Um die Hamiltonsche Funktion zu erhalten, gehen wir von einer Lagrangefunktion $L = L(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}, t)$ aus und schreiben die totale Ableitung

$$\mathrm{d}L = \frac{\partial L}{\partial t}\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\mathrm{d}q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\mathrm{d}\dot{q}_i\right). \tag{1}$$

Wir benutzen dann die Definition des kanonischen Impulses und die Euler-Lagrange-Gleichung

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \qquad \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \tag{2}$$

und erhalten

$$\mathrm{d}L = \frac{\partial L}{\partial t}\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}q_i + p_i\mathrm{d}\dot{q}_i\right). \tag{3}$$

Den letzten Term formen wir mit Hilfe von

$$p_i\mathrm{d}\dot{q}_i = \mathrm{d}\left(p_i\dot{q}_i\right) - \dot{q}_i\mathrm{d}p_i \tag{4}$$

um und erhalten

$$\mathrm{d}\left(L - \sum_{i=1}^{N}p_i\dot{q}_i\right) = \sum_{i=1}^{N}\left[\dot{p}_i\mathrm{d}q_i - \dot{q}_i\mathrm{d}p_i\right] + \frac{\partial L}{\partial t}\mathrm{d}t. \tag{5}$$

Damit definieren wir dann eine neue Funktion H in Abhängigkeit von den *Koordinaten, Impulsen und der Zeit*

$$H(\{q_i\}, \{p_i\}, t) = \sum_{i=1}^{N}p_i\dot{q}_i - L \tag{6}$$

und erhalten

$$\mathrm{d}H = -\sum_{i=1}^{N}\left[\dot{p}_i\mathrm{d}q_i - \dot{q}_i\mathrm{d}p_i\right] - \frac{\partial L}{\partial t}\mathrm{d}t. \tag{7}$$

Aus dieser Formel folgen sofort die partiellen Ableitungen von H,

$$\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad \frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \tag{8}$$

Diese Gleichungen nennen wir die *Hamiltonschen Gleichungen.*

Als Beispiel betrachten wir die Bewegung eines Teilchens in einem Kraftfeld. Dessen Lagrangefunktion lautet

$$L = \frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2} - U(\vec{r}). \tag{9}$$

Der Impuls ist

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = m\dot{\vec{r}}, \tag{10}$$

sodass

$$H = \vec{p} \cdot \dot{\vec{r}} - L = \frac{\vec{p}^2}{2m} + U(\vec{r}). \tag{11}$$

Wir erhalten dann die Hamiltonschen Gleichungen

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = -\frac{H}{\partial \vec{r}} = -\frac{\partial U(\vec{r})}{\partial \vec{r}}, \qquad \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{H}{\partial \vec{p}} = \frac{\vec{p}}{m}. \tag{12}$$

Diese zwei Differentialgleichungen erster Ordnung können wir sofort als Euler-Lagrange-Gleichungen umschreiben, indem wir die zweite Gleichung nach der Zeit ableiten und dann die erste Gleichung einsetzen

$$m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\vec{p}}{m} = -\frac{\partial U(\vec{r})}{\partial \vec{r}}. \tag{13}$$

Das ist die Euler-Lagrange-Gleichung oder, äquivalent, das Zweite Newtonsche Gesetz.

2. Die Poisson Klammer: Wir betrachten eine Funktion f, die von Impulsen, Koordinaten und der Zeit abhängt

$$f = f(\{p_i\}, \{q_i\}, t). \tag{14}$$

Wir berechnen die totale Zeitableitung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\partial f}{\partial p_i}\dot{p}_i + \frac{\partial f}{\partial q_i}\dot{q}_i\right]. \tag{15}$$

Die Zeitabhängigkeit der Impulse und Koordinaten folgt aus den Hamiltonschen Gleichungen Gl. (8). Wir erhalten

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N}\left[-\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} + \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i}\right] = \frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\}. \tag{16}$$

Den letzten Term $\{H, f\}$ haben wir als *Poisson-Klammer* geschrieben. Die Poisson-Klammer zweier Funktionen F, G ist definiert als

$$\{F, G\} = \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q_i} - \frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial p_i}. \tag{17}$$

Wir können Poisson-Klammern verwenden, um Erhaltungsgrößen zu bestimmen. Weil die totale Zeitableitung für eine Erhaltungsgröße I Null ist, erhalten wir

$$\frac{\partial I}{\partial t} = -\{H, I\}, \tag{18}$$

und, falls I nicht explizit zeitabhängig ist, gilt Folgendes

$$\{H, I\} = 0. \tag{19}$$

Die Poisson-Klammern haben verschiedene Eigenschaften, die man aus der Definition herleiten kann. Die entsprechenden Formeln lauten

$$\begin{aligned} &\{F_1, F_2\} = -\{F_2, F_1\}, \qquad \{F_1 + F_2, F_3\} = \{F_1, F_3\} + \{F_2, F_3\}, \\ &\{F_1 F_2, F_3\} = F_1\{F_2, F_3\} + F_2\{F_1, F_3\}. \end{aligned} \tag{20}$$

Poisson-Klammern erfüllen die Jacobi-Identität

$$\{F_1, \{F_2, F_3\}\} + \{F_2, \{F_3, F_1\}\} + \{F_3, \{F_1, F_2\}\} = 0. \tag{21}$$

Außerdem sind folgende Poisson-Klammern wichtig

$$\{p_i, F\} = \frac{\partial F}{\partial q_i}, \qquad \{q_i, F\} = -\frac{\partial F}{\partial p_i}. \tag{22}$$

Wir können die Poisson-Klammern benutzen, um Erhaltungsgrößen zu konstruieren. Zum Beispiel betrachten wir zwei Erhaltungsgrößen $I_{1,2}$, die nur von Impulsen und Koordinaten abhängig sind. Dann gilt

$$0 = \{H, I_1\} = \{H, I_2\}, \tag{23}$$

und aus der Jacobi-Identität folgt

$$0 = \{H, \{I_1, I_2\}\} + \{I_1, \{I_2, H\}\} + \{I_2, \{H, I_1\}\} = \{H, \{I_1, I_2\}\}. \tag{24}$$

Das bedeutet, dass $\{I_1, I_2\}$ auch eine Erhaltungsgröße ist.

Wir werden jetzt als Beispiel ein Teilchen im Zentralkraftfeld betrachten. Die Hamiltonsche Funktion dazu ist

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + U(r). \tag{25}$$

Wir wissen, dass der Drehimpuls $\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{p}]$ in diesem Fall erhalten ist und wir können versuchen, das mit Hilfe von Poisson-Klammern zu bestätigen. Wir benutzen die Eigenschaften der Poisson-Klammern, die wir bereits diskutiert haben und berechnen

$$\begin{aligned} \{M_i, H\} &= \epsilon_{ijk}\{r_j p_k, H\} = \epsilon_{ijk}\left[r_j\{p_k, H\} + p_k\{r_j, H\}\right] = \epsilon_{ijk}\left[r_j \frac{\partial H}{\partial r_k} - p_k \frac{\partial H}{\partial p_j}\right] \\ &= \epsilon_{ijk}\left[r_j \frac{\partial U}{\partial r_k} - \frac{p_k p_j}{m}\right] = \epsilon_{ijk}\left[\frac{r_j r_k}{r}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r} - \frac{p_k p_j}{m}\right] = 0, \end{aligned} \tag{26}$$

weil wir zwei symmetrische Tensoren mit einem antisymmetrischen Tensor kontrahiert haben. Weil M_i zeitunabhängig ist, folgt aus Gl. (26), dass M_i erhalten ist.

Wir betrachten jetzt zwei Komponenten des Drehimpulsvektors und berechnen deren Poisson-Klammer. Wir erwarten, eine Erhaltungsgröße zu finden. In der Tat gilt

$$\begin{aligned}\{M_a, M_b\} &= \epsilon_{aij}\epsilon_{bkm}\{r_i p_j, r_k p_m\} = \epsilon_{aij}\epsilon_{bkm}\left[r_i p_m \{p_j, r_k\} + p_j r_k \{r_i, p_m\}\right] \\ &= \epsilon_{aij}\epsilon_{bkm}\left[r_i p_m \delta_{jk} - p_j r_k \delta_{im}\right].\end{aligned} \tag{27}$$

Um diesen Ausdruck zu vereinfachen, benutzen wir

$$\epsilon_{aij}\epsilon_{bkm}\delta_{jm} = \delta_{ab}\delta_{ik} - \delta_{ak}\delta_{ib}, \tag{28}$$

und erhalten

$$\{M_a, M_b\} = p_a r_b - p_b r_a = -\epsilon_{abc}\epsilon_{cij} r_i p_j = -\epsilon_{abc} M_c. \tag{29}$$

Wir sehen, dass die Poisson-Klammer zweier Komponenten des Drehimpulses die jeweils dritte Komponente des Drehimpuls erzeugt. Weil alle Komponenten des Drehimpulses erhalten sind, illustriert diese Berechnung die vorherige Aussage, dass die Poisson-Klammer zweier Erhaltungsgrößen auch eine Erhaltungsgröße ist.

Hamiltonsche Gleichungen aus dem Variationsprinzip: Wir können die Hamiltonschen Gleichungen auch als eine Konsequenz des Variationsprinzips herleiten. In der Tat lautet die Wirkung

$$S = \int L \ \mathrm{d}t, \tag{30}$$

Wir drücken die Lagrangefunktion durch die Hamiltonsche Funktion aus

$$L = p\dot{q} - H, \tag{31}$$

benutzen

$$p\dot{q} \ \mathrm{d}t = p \ \mathrm{d}q, \tag{32}$$

und erhalten den Ausdruck für die Wirkung

$$S = \int \left(p \ \mathrm{d}q - H \ \mathrm{d}t\right). \tag{33}$$

Wir berechnen dann die Variation

$$\delta S = \int \left(\delta p \ \mathrm{d}q + p \ \mathrm{d}\delta q - \left(\frac{\partial H}{\partial q}\delta q + \frac{\partial H}{\partial p}\delta p\right) \mathrm{d}t\right]. \tag{34}$$

Damit können wir $\int p \ \mathrm{d}\delta q$ vereinfachen, indem wir schreiben

$$\int p \ \mathrm{d}\delta q = \int \left(\mathrm{d}(p \ \delta q) - \delta q \ \mathrm{d}p\right) = p \ \delta q\Big|_{t_1}^{t_2} - \int \delta q \ \mathrm{d}p = -\int \delta q \ \mathrm{d}p, \tag{35}$$

wobei $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ ist. Wir erhalten dann

$$\begin{aligned} \delta S &= \int \left[\delta p \; \mathrm{d}q - \delta q \; \mathrm{d}p - \left(\frac{\partial H}{\partial q} \delta q + \frac{\partial H}{\partial p} \delta p \right) \mathrm{d}t \right] \\ &= \int \left[\delta p \left(\mathrm{d}q - \frac{\partial H}{\partial p} \mathrm{d}t \right) + \delta q \left(-\mathrm{d}p - \frac{\partial H}{\partial q} \mathrm{d}t \right) \right] . \end{aligned} \tag{36}$$

Um die Bewegungsgleichungen zu erhalten, fordern wir, dass $\delta S = 0$ ist. Daraus erhalten wir dann die Hamiltonschen Gleichungen

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial p}, \qquad \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H}{\partial q}. \tag{37}$$