Vorlesung 8: Anharmonische Schwingungen

Wir betrachten ein Teilchen mit der Masse m in einem Kraftfeld, das wir mit der potentiellen Energie $U(x)$ beschreiben. Die Lagrangefunktion lautet

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x). \tag{1}$$

Die potentielle Energie hat ein Minimum bei $x = x_0$. Wir entwickeln $U(x)$ in der Nähe des Minimums und erhalten

$$U(x)|_{x\sim x_0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left.\frac{\mathrm{d}^n U(x)}{\mathrm{d}x^n}\right|_{x=x_0} (x - x_0)^n. \tag{2}$$

Weil x_0 ein Minimum ist, muss $\mathrm{d}U/\mathrm{d}x|_{x=x_0}$ verschwinden und $\mathrm{d}^2U/\mathrm{d}x^2|_{x=x_0}$ positiv sein. Im Fall kleiner Schwingungen haben wir nur die zweite Ableitung in Gl. (2) berücksichtigt. Allerdings ist es auch interessant zu untersuchen, was passiert, wenn wir mehr Terme in Gl. (2) mitnehmen. Dementsprechend führen wir eine neue Koordinate ξ ein, $\xi = (x - x_0)/\sqrt{m}$, und schreiben die Lagrangefunktion als

$$L = \frac{\dot{\xi}^2}{2} - \frac{\omega_0^2}{2}\xi^2 - \frac{\alpha\xi^3}{3} - \frac{\beta\xi^4}{4} + \mathcal{O}(\xi^5). \tag{3}$$

Die Parameter α, β usw. kann man durch entsprechende Ableitungen des Potentials an $x = x_0$ ausdrücken.

Wir wollen herausfinden, welchen Einfluss die $\mathcal{O}(\xi^3, \xi^4)$ Terme in der Lagrangefunktion auf kleine Schwingungen haben. Wir haben die Bewegungsgleichung

$$\ddot{\xi} + \omega_0^2\xi = -\alpha\xi^2 - \beta\xi^3. \tag{4}$$

Für kleine Schwingungen sind die Terme auf der rechten Seite klein. Um das formal auszudrücken, führen wir einen Parameter $\epsilon \ll 1$ ein und schreiben Gl. (4) um als

$$\ddot{\xi} + \omega_0^2\xi = -\epsilon\alpha\xi^2 - \epsilon^2\beta\xi^3. \tag{5}$$

Die Idee ist dann, die Bewegungsgleichung Gl. (5) als eine Taylor-Reihe in ϵ zu lösen. Dementsprechend setzen wir

$$\xi = \xi_0 + \epsilon\xi_1 + \epsilon^2\xi_2 + \mathcal{O}(\epsilon^3), \qquad \omega_0^2 = \omega^2 - \epsilon\omega_1^2 - \epsilon^2\omega_2^2 + \mathcal{O}(\epsilon^3) \tag{6}$$

an. Warum wir die gegebene Größe ω_0^2 durch den unbekannten Parameter ω^2 ausdrücken und nicht umgekehrt, ist momentan nicht klar, aber in Kürze werden wir sehen, dass dies sehr wichtig ist.

Wir schreiben dann Gl. (5) zu

$$\ddot{\xi} + \omega^2\xi = -\epsilon\alpha\xi^2 - \epsilon^2\beta\xi^3 + (\omega^2 - \omega_0^2)\xi \tag{7}$$

um, setzen die Ausdrücke aus Gl. (6) in Gl. (7) ein und schreiben die beiden Seiten als ein Polynom in ϵ

$$\sum_{i=0} \epsilon^i L_i = \sum_{i=0} \epsilon^i R_i. \tag{8}$$

Für kleines, aber ansonsten beliebiges ϵ kann diese Gleichung nur stimmen, falls

$$L_i = R_i, \tag{9}$$

für alle $i = 0, 1, 2, \ldots$. Das bedeutet, dass wir durch Koeffizientenvergleich viele Gleichungen aus einer Gleichung bekommen. Die relevanten Gleichungen lauten

$$\begin{aligned}
i = 0: &\quad \ddot{\xi}_0 + \omega^2 \xi_0 = 0, \\
i = 1: &\quad \ddot{\xi}_1 + \omega^2 \xi_1 = -\alpha \xi_0^2 + \omega_1^2 \xi_0, \\
i = 2: &\quad \ddot{\xi}_2 + \omega^2 \xi_2 = -2\alpha \xi_0 \xi_1 - \beta \xi_0^3 + \omega_1^2 \xi_1 + \omega_2^2 \xi_0.
\end{aligned} \tag{10}$$

Wir können jetzt diese Gleichungen iterativ lösen. Aus der Gleichung für $i = 0$ erhalten wir

$$\xi_0 = a \cos(\omega t + \varphi). \tag{11}$$

Das ist eine harmonische Schwingung mit der Frequenz ω, die in dieser Ordnung der ϵ-Entwicklung mit ω_0 identifiziert werden kann.

Wir benutzen jetzt die Lösung für ξ_0 aus Gl. (11), um die rechte Seite der Gleichung für $i = 1$ zu vereinfachen. Wir erhalten

$$\ddot{\xi}_1 + \omega^2 \xi_1 = -\alpha a^2 \cos^2(\omega t + \varphi) + \omega_1^2 a \cos(\omega t + \varphi). \tag{12}$$

Wir schreiben die rechte Seite um als

$$\ddot{\xi}_1 + \omega^2 \xi_1 = -\frac{\alpha a^2}{2}(1 + \cos(2\omega t + 2\varphi)) + \omega_1^2 a \cos(\omega t + \varphi). \tag{13}$$

Diese Gleichung betrachten wir als Gleichung für erzwungene Schwingungen. Wir wissen, dass wir in diesem Fall eine Resonanz erhalten, falls auf der rechten Seite die Kraft mit der Frequenz ω oszilliert. Wir wollen hier aber nicht den Fall der Resonanz diskutieren, weil dann unsere ϵ-Entwicklung nicht mehr gültig wäre. Es folgt aus Gl. (13), dass es keine Resonanz gibt, falls $\omega_1^2 = 0$. Dann finden wir die spezielle Lösung der Gl. (13) und erhalten

$$\xi_1 = -\frac{\alpha a^2}{2\omega^2} + \frac{\alpha a^2}{6\omega^2} \cos(2\omega t + 2\varphi). \tag{14}$$

Wir verwenden dann die Lösungen ξ_0, ξ_1 und ω_1^2 in der $i = 2$ Gleichung, vereinfachen das Ergebnis mit Hilfe der trigonometrischen Formeln

$$\begin{aligned}
\cos^3(\omega t + \varphi) &= \frac{3}{4} \cos(\omega t + \varphi) + \frac{1}{4} \cos(3\omega t + 3\varphi), \\
\cos(\omega t + \varphi) \cos(2\omega t + 2\varphi) &= \frac{1}{2} \cos(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2} \cos(3\omega t + 3\varphi),
\end{aligned} \tag{15}$$

und erhalten

$$\ddot{\xi}_2 + \omega^2 \xi_2 = \cos(\omega t + \varphi)\left[\frac{5}{6}\frac{\alpha^2 a^3}{\omega^2} - \frac{3\beta a^3}{4} + \omega_2^2 a\right] + \cos(3\omega t + 3\varphi)\left[-\frac{\alpha^2 a^3}{6\omega^2} - \frac{\beta a^3}{4}\right]. \quad (16)$$

In diesem Fall können wir die anregende Kraft auf der rechten Seite, die für die Resonanz verantwortlich ist, loswerden, wenn wir ω_2^2 gleich

$$\omega_2^2 = -\frac{5}{6}\frac{\alpha^2 a^2}{\omega^2} + \frac{3\beta a^2}{4} \quad (17)$$

wählen. Wir konstruieren dann die spezielle Lösung für ξ_2, addieren ξ_0, ξ_1 und ξ_2 auf und setzen $\epsilon \to 1$. Die Zeitabhängigkeit der Auslenkung ξ lautet

$$\begin{aligned} \xi(t) &= a\cos(\omega t + \varphi) + \left(-\frac{\alpha a^2}{2\omega^2} + \frac{\alpha a^2}{6\omega^2}\cos(2\omega t + 2\varphi)\right) \\ &\quad + \left(\left[\frac{\alpha^2 a^3}{48\omega^4} + \frac{\beta a^3}{32\omega^2}\right]\cos(3\omega t + 3\varphi)\right), \\ \omega^2 &= \omega_0^2 + \left[-\frac{5\alpha^2 a^2}{6\omega^2} + \frac{3\beta a^2}{4}\right]. \end{aligned} \quad (18)$$

Diese Ergebnisse zeigen die Unterschiede zwischen harmonischen und anharmonischen Schwingungen. Harmonische Schwingungen laufen mit einer Frequenz ab und die Amplitude ist frequenzunabhängig. Für anharmonische Schwingungen gibt es Schwingungsmoden mit den Frequenzen ω, 2ω, 3ω usw. und die Frequenz ω ist von der Amplitude a anhängig. Das bedeutet auch, dass die Schwingungsdauer des anharmonischen Pendels von Energie (bzw. Amplitude) des Pendels abhängt.