

Vorlesung 7: Kleine Schwingungen mit vielen Freiheitsgraden

Wir betrachten ein mechanisches System mit N Freiheitsgraden welches mit folgender Lagrangfunktion beschrieben wurde

$$L = \sum_{i,j} a_{ij}(q_1, \dots, q_N) \dot{q}_i \dot{q}_j - U(q_1, \dots, q_N). \quad (1)$$

Wir nehmen an dass die Potentielle Energie ein Minimum für $q_i = q_{0,i}$, $i = 1 \dots N$ hat. Die Bewegung des Systems in der Nähe von $\vec{q} = \vec{q}_0$ ist eine Schwingung. Um die Bewegung des Systems in der Nähe von $\vec{q} = \vec{q}_0$ zu beschreiben, entwickeln wir die Lagrangfunktion in Taylorreihe in $\vec{\xi} = \vec{q} - \vec{q}_0$. Die Ausweichungen $|\vec{\xi}|$ sind klein; wie entwickeln die Lagrangfunktion bis zweiter Ordnung in ξ . Wir merken dass $\dot{q}_i = \dot{\xi}_i$ genauso klein ist wie ξ_i selbst weil für Schwingungen $\dot{\xi}_i \sim \omega \xi_i$ ist wobei ω die Frequenz der Schwingungen entspricht. Das bedeutet dass in der kinetischen Energie, können wir $a_{ij}(q_1, \dots, q_N)$ mit Konstanten $1/2m_{ij}$ ersetzen und die Potentielle Energie mit

$$U(q_1, \dots, q_N) = U_0 + \frac{1}{2} k_{ij} \xi_i \xi_j + \mathcal{O}(\xi^3). \quad (2)$$

Wir erhalten dann die universelle Lagrangfunktion welche die kleine Schwingungen der Systeme mit viele Freiheitsgraden beschreibt

$$L = \frac{1}{2} \sum_{ij} (m_{ij} \dot{\xi}_i \dot{\xi}_j - k_{ij} \xi_i \xi_j) \quad (3)$$

Die Koeffizienten m_{ij} und k_{ij} sind symmetrisch

$$m_{ij} = m_{ji}, \quad k_{ij} = k_{ji}. \quad (4)$$

Die Euler-Lagrange Gleichungen lauten

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_i} = \frac{\partial L}{\partial \xi_i} \Rightarrow \sum_{j=1}^N [m_{ij} \ddot{\xi}_j + k_{ij} \xi_j] = 0 \quad (5)$$

Die letzte Gleichung können wir wie eine Matrixgleichung schreiben

$$\hat{m} \ddot{\vec{\xi}} + \hat{k} \vec{\xi} = 0, \quad (6)$$

wobei die Matrizen \hat{m}, \hat{k} die Elementen m_{ij} und k_{ij} haben.

Wir nehmen an dass das System mit bestimmte Frequenz ω schwinkt. Wir schreiben dann

$$\vec{\xi} = \text{Re} [\vec{a} e^{i\omega t + \varphi}], \quad (7)$$

setzen diesen Ansatz in der Gl.(6) ein und erhalten

$$[-\omega^2 \hat{m} + \hat{k}] \vec{a} = 0. \quad (8)$$

Aus diese Gleichung Gl.(8) bekommen wir die frequenzen ω und die Amplituden \vec{a} der Schwingungen. Das passiert auf folgender Weise. Die homogene lineare Gleichung Gl.(8) hat nicht-triviale¹ Lösungen für die Amplitude \vec{a} nur wenn

$$\det \left[-\omega^2 \hat{m} + \hat{k} \right] = 0. \quad (9)$$

Die Eigenfrequenzen die Systems folgen von diese Gleichung. Für ein System mit N -Freiheitsgraden gibt N -Eigenfrequenzen aber manche können entartet sein. Nach dem die Frequenzen vorhanden sind, bestimmt man die Amplituden aus Gl.(8).

Die Frequenzen und Amplituden haben wichtige Eigenschaften. Zum Beispiel, wir multiplizieren Gl.(8) mit transponiertem vector \vec{a} und erhalten²

$$\omega^2 = \frac{\vec{a}_i \hat{k}_{ij} \vec{a}_j}{\vec{a}_i m_{ij} \vec{a}_j}. \quad (10)$$

Die Matrizen \hat{m} und \hat{k} sollen positiv sein, d.h.

$$\omega^2 > 0 \quad (11)$$

und alle Frequenzen sind reel.

Eine andere Eigenschaft ist die "Orthogonalität" die Amplituden die verschiedene Frequenzen entsprechen. Bezeichnen wir die Frequenzen mit einem Label s . Dann gilt

$$\begin{aligned} -\omega_s^2 m_{ij} a_j^{(s)} + k_{ij} a_j^{(s)} &= 0 \\ -\omega_{s'}^2 m_{ij} a_j^{(s')} + k_{ij} a_j^{(s')} &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

Wir multiplizieren die erste Gleichung mit $a_i^{(s)}$, die zweite mit $a_j^{(s')}$ und summieren über i . Wir bekommen

$$\begin{aligned} \omega_s^2 a_i^{(s')} m_{ij} a_j^{(s)} &= a_i^{(s')} k_{ij} a_j^{(s)}, \\ \omega_{s'}^2 a_i^{(s)} m_{ij} a_j^{(s')} &= a_i^{(s)} k_{ij} a_j^{(s')}, \end{aligned} \quad (13)$$

Die Matrizen \hat{m} und \hat{k} sind symmetrisch, das bedeuten das die rechten Seiten gleich sind. Wir subtrahieren die zwei Gleichungen Gl.(13) aus ein andere und erhalten

$$(\omega_s^2 - \omega_{s'}^2) a_i^{(s')} m_{ij} a_j^{(s)} = 0. \quad (14)$$

Das bedeutet dass falls $\omega_s \neq \omega_{s'}$ ist, gilt

$$a_i^{(s')} m_{ij} a_j^{(s)} = 0, \quad a_i^{(s')} k_{ij} a_j^{(s)} = 0. \quad (15)$$

¹"Nicht-triviale" bedeuten $\vec{a} \neq 0$.

²Zur Erinnerung: zwei identische Indizen in einer Formel bedeuten dass man über diese Indizen summieren muss.

Wir können die Amplituden so normieren dass die folgende Gleichung gilt

$$a_i^{(s')} m_{ij} a_j^{(s)} = \delta^{ss'}, \quad a_i^{(s')} k_{ij} a_j^{(s)} = \omega_s^2 \delta_{ss'}. \quad (16)$$

Diese ‘‘Orthogonalität’’-Relationen für Amplituden kann man benutzen um die Berechnung von Eigenamplituden zu vereinfachen. Falls es in einem System entartende Frequenzen gibt, sind die entsprechenden Amplituden nicht unbedingt orthogonal (in dem Sinne von Gl.(15)); es ist allerdings möglich die entartete Amplituden so zu wählen dass die orthogonal zu ein andere sind.

Angenommen dass wir die Eigenfrequenzen und die Eigenamplituden berechnet haben und dass Alle Diese N -unabhängige Vektoren können wir als die Basis benutzen. Wir schreiben dann

$$\vec{\xi} = \sum_{s=1}^N r_s \vec{a}^{(s)}, \quad (17)$$

wobei r_s die Koordinaten den (N -dimensionale) Vektor $\vec{\xi}$ in der neuen Basis sind. Wir nennen diese Koordinaten ‘‘Normalkoordinaten’’.

Wir benutzen dann die Gl.(17) um die Lagrangefunktionen Gl.(3) umzuschreiben. Mit Hilfe Gl.(16) erhalten wir

$$2U = \sum_{ij} k_{ij} \xi_i \xi_j = \sum_{s,s'} r_s r_{s'} \sum_{ij} k_{ij} a_i^{(s')} a_j^{(s)} = \sum_{s,s'} r_s r_{s'} \delta_{ss'} \omega_s^2 = \sum_s \omega_s^2 r_s^2. \quad (18)$$

und

$$2T = \sum_{ij} m_{ij} \dot{\xi}_i \dot{\xi}_j = \sum_{s,s'} \dot{r}_s \dot{r}_{s'} \sum_{ij} m_{ij} a_i^{(s')} a_j^{(s)} = \sum_{s,s'} \dot{r}_s \dot{r}_{s'} \delta_{ss'} = \sum_s \dot{r}_s^2. \quad (19)$$

Wir erhalten

$$L = \frac{1}{2} \sum_s [\dot{r}_s^2 - \omega_s^2 r_s^2]. \quad (20)$$

Es folgt von Lagrangefunktion Gl.(20) dass die Bewegungsgleichungen in Normalkoordinaten unabhängig von ein andere sind. Die Euler-Lagrange Gleichung ist dann

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_s} = \frac{\partial L}{\partial r_s}, \quad \Rightarrow \quad \ddot{r}_s + \omega_s^2 r_s = 0. \quad (21)$$

Die Zeitabhängigkeit der Noormalkoordinaten ist dann

$$r_s = C_s \cos(\omega_s t + \varphi_s). \quad (22)$$

Die allgemeine Lösung für die Abweichung $\vec{\xi}$ ist dann

$$\vec{\xi}(t) = \sum_{s=1}^N C_s \vec{a}_s \cos(\omega_s t + \varphi_s) \quad (23)$$

In dieser Lösung haben wir $2N$ Konstanten ($C_s, \varphi_s, s = 1 \dots N$), die wir wählen um die Randbedingungen zu erfüllen.

Wir betrachten ein Beispiel. Die Lagrangefunktion lautet

$$L = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\dot{y}^2 - \frac{\omega_0^2}{2}(x^2 + y^2 - 2\alpha xy). \quad (24)$$

Das bedeutet dass die Matrizen \hat{m} , \hat{k} so aussehen

$$\hat{m} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{k} = \omega_0^2 \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix}. \quad (25)$$

Die Matrize $\hat{O} = -\omega^2\hat{m} + \hat{k}$ ist dann

$$\hat{O} = \begin{pmatrix} -\omega^2 + \omega_0^2 & -\alpha\omega_0^2 \\ -\alpha\omega_0^2 & -\omega^2 + \omega_0^2 \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Die Determinante diese Matrix muss eine Null sein

$$\det[-\omega^2\hat{m} + \hat{k}] = (\omega^2 - \omega_0^2)^2 - \alpha^2\omega_0^4 = 0. \quad (27)$$

D.h. die mögliche Eigenfrequenzen sind

$$\omega^2 - \omega_0^2 = \pm\alpha\omega_0^2 \Rightarrow \omega_{\pm}^2 = \omega_0^2(1 \pm \alpha). \quad (28)$$

Finden wir in dem wir $\mathcal{O}(\omega_{\pm}^2)$ berechnen und dann die Amplituden. Wir erhalten

$$\hat{O}_{\pm} = \hat{O}|_{\omega=\omega_{\pm}}, \quad (29)$$

wo

$$\hat{O}_{\omega_{\pm}} = -\omega_0^2 \begin{pmatrix} \pm\alpha & \alpha \\ \alpha & \pm\alpha \end{pmatrix}. \quad (30)$$

Wir finden die Eigenamplituden

$$\hat{O}_{\pm}\vec{a}_{\pm} = 0, \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Die Eigenamplituden sind richtig normiert; z.B.

$$\vec{a}_+^T \hat{m} \vec{a}_+ = 1. \quad (32)$$

Wir machen jetzt die Variablentransformation zu den Normalkoordinaten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = r_+\vec{a}_+ + r_-\vec{a}_-. \quad (33)$$

Dann

$$x = \frac{r_+ + r_-}{\sqrt{2}}, \quad y = \frac{-r_+ + r_-}{\sqrt{2}}, \quad (34)$$

sodass

$$L = \frac{\dot{r}_+^2}{2} + \frac{\dot{r}_-^2}{2} - \frac{\omega_+^2}{2} r_+^2 - \frac{\omega_-^2}{2} r_-^2. \quad (35)$$

Die allgemeine Lösung ist dann

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{C_+}{\sqrt{2}} \cos(\omega_+ t + \varphi_+) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{C_-}{\sqrt{2}} \cos(\omega_- t + \varphi_-) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (36)$$

Die Konstanten C_\pm, φ_\pm wählt man so dass die Randbedingungen erfüllt sind.

Normalkoordinaten sind auch nützlich um die erzwungene Schwingungen in Systemen mit viele Freiheitsgraden zu untersuchen. In der Tat, die universelle Lagrangefunktion in dem Fall lautet

$$L = \frac{1}{2} \sum_{ij} [m_{ij} \dot{\xi}_i \dot{\xi}_j - k_{ij} \xi_i \xi_j] + \sum_i f_i(t) \xi_i. \quad (37)$$

Um die Erzwungenen Schwingungen zu studieren finden wir die Normalkoordinaten und schreiben die Lagrangfunktion um

$$L = \frac{1}{2} \sum_s [\dot{r}_s^2 - \omega_s^2 r_s^2] - \sum_s f_s(t) r_s, \quad (38)$$

wobei

$$f_s(t) = \sum_i f_i(t) a_i^{(s)} = \vec{f}(t) \cdot \vec{a}^{(s)}. \quad (39)$$

Es folgt aus Gl.(38,39) das die erzwungene Schwingungen einer Normalcoordinate unabhängig von andere Normalkoordinaten passieren. Die Stärke die erzwingende Kraft für eine Eigenfrequenz ω_s durch der Projektion den Kraftvektor \vec{f} and der Eigenamplitude $\vec{a}^{(s)}$ gegeben ist. Für harmonische Kraft $\vec{f}(t) \sim \cos(\omega t + \phi)$ gibt die Resonanz falls ω gleich eine von Eigenfrequenzen ist, falls die Projektion von \vec{f} auf entsprechender Eigenamplitude von Null verschieden ist.

Wir können die Berechnung von Amplituden stark vereinfachen in dem wir die Symmetrien der Lagrangefunktion benutzen. Wir nehmen an das die Lagrangefunktion unter folgenden Transformation invariant ist

$$\xi_i \rightarrow \xi'_i = S_{ij} \xi_j, \quad (40)$$

wobei die Matrize \hat{S} folgende Gleichung erfüllt

$$\hat{S}^2 = 1. \quad (41)$$

Diese zwei Gleichungen bedeuten dass die Matrizen \hat{m} und \hat{k} folgenden Gleichungen erfüllen

$$S^T \hat{m} S = \hat{m}, \quad S^T \hat{k} S = \hat{k}. \quad (42)$$

Die Gleichung die Eigenamplitude \vec{a}_s erfüllt lautet

$$\left[-\omega_s^2 \hat{m} + \hat{k} \right] \vec{a}_s = 0. \quad (43)$$

Wir multiplizieren diese Gleichung mit S^T von links and benutzen $SS = 1$ um zu schreiben

$$0 = \left[-\omega_s^2 \hat{m} + \hat{k} \right] \vec{a}_s = S^T \left[-\omega_s^2 \hat{m} + \hat{k} \right] 1 \vec{a}_s = S^T \left[-\omega_s^2 \hat{m} + \hat{k} \right] SS \vec{a}_s = \left[-\omega_s^2 \hat{m} + \hat{k} \right] S \vec{a}_s \quad (44)$$

Diese Gleichung bedeuten dass nicht nur \vec{a}_s sondern auch $S\vec{a}_s$ die Eigenamplitude mit der Frequenz ω_s ist. Stellen wir uns vor dass die Schwinkung mit dieser Frequenz nicht entartet ist. Dann muss gelten

$$S\vec{a}_s = \lambda \vec{a}_s. \quad (45)$$

Wir multiplizieren diese Gleichung mit S , benutzen $S^2 = 1$ und erhalten

$$1 = \lambda^2, \quad \lambda = \pm 1. \quad (46)$$

Das bedeutet der Vektor \vec{a}_s der Eigenvektor der Matrize S mit dem Eigenwert ± 1 ist. Diese Eigenschaft die Eigenamplituden kann man verwenden um die Berechnung in komplizierten (aber symmetrischen) Fälle zu vereinfachen.

Als Beispiel betrachten wir drei Teilchen die mit zwei Federn miteinander verbunden sind. Die Largangefunktion lautet

$$L = \frac{m\dot{x}_1^2}{2} + \frac{M\dot{x}_2^2}{2} + \frac{m\dot{x}_3^2}{2} - \frac{k}{2}(x_1 - x_2)^2 - \frac{k}{2}(x_3 - x_2)^2, \quad (47)$$

wobei $x_{1,2,3}$ die Abweichungen von Gleichgewichtpositionen beschreiben.

Diese Lagrangefunktion ist invariant unter der Vertauschung von x_1 und x_3 . Wir können diese Transformation mit der folgenden Matrize beschreiben

$$\hat{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (48)$$

sodass

$$S \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}. \quad (49)$$

Wir können auch feststellen dass $S^2 = 1$ erfüllt ist. Unsere Diskussion zur Folge, sollen die Eigenamplituden dann entweder symmetrisch oder antisymmetrisch unter die Transformation $x_1 \leftrightarrow x_3$ sein.

Wir fangen an mit der *antisymmetrischen* Amplitude. Diese Amplitude muss dann so aussehen

$$\vec{\xi}(t) = e^{i\omega t} \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ x \end{pmatrix}. \quad (50)$$

Um $x(t)$ zu bestimmen, benutzen wir die Bewegungsgleichungen für x_1 die aus der Largangfunktion Gl.(47) folgen

$$m\ddot{x}_1 + k(x_1 - x_2) = 0, \quad (51)$$

setzen den Ansatz Gl.(50) ein und erhalten

$$(-\omega^2 m + k) x = 0. \quad (52)$$

Das bedeutet dass die (normierte) Eigenfrequenz und die Eigenamplitude für antisymmetrische Schwinkung lauten

$$\omega_1^2 = \frac{k}{m}, \quad \vec{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (53)$$

Der symmetrische Fall ist etwas komplizierte. In dem Fall gibt eine Lösung die man raten kann. Diese Lösung entspricht eine freie Bewegung von drei Teilchen ohne schwingen. Dann

$$\omega_2 = 0, \quad \vec{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{2m + M}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (54)$$

Die zweite symmetrische Schwinkung muss dann so aussehen

$$\vec{\xi}(t) = e^{i\omega t} \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix}. \quad (55)$$

Es ist einfach das Verhältnis zwischen x und y zu bestimmen weil verschiedene Eigenamplituden orthogonal (mit der Matrize \hat{m}) sein soll. Dann muss gelten

$$(1, 1, 1) \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} = 0. \quad (56)$$

Aus diese Gleichung erhalten wir

$$y = -\frac{2m}{M}x, \quad (57)$$

so dass die Eigenamplitude lautet

$$\vec{a}_3 = \sqrt{\frac{M}{2m(2m + M)}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2m}{M} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (58)$$

Um die Eigenfrequenz zu finden, benutzen wir Gl.(51) noch ein mal und setzen dort $x_1 \rightarrow x$ und $x_2 \rightarrow y = -2m/Mx$ ein. Wir erhalten

$$\left[-m\omega^2 + k \left(1 + \frac{2m}{M} \right) \right] x = 0. \quad (59)$$

Es folgt

$$\omega_3^2 = \frac{k}{m} \frac{M + 2m}{M}. \quad (60)$$

Um das lätztes Beispiel zusammen zu fassen: wir haben alle Eigenfrequenzen und Eigenamplituden eines kompliziertes Systems gefunden ohne die Determinante zu berechnen. Die Symmetrien und die Bewegungsgleichungen habe sehr wichtige Role gespielt.