Vorlesung 7: Kleine Schwingungen mit vielen Freitheitsgraden

Wir betrachten ein mechanisches System mit N Freiheitsgraden welches mit folgender Lagrangfunktion beschrieben wurde

$$L = \sum_{i,j} a_{ij}(q_1, ..., q_N)\dot{q}_i\dot{q}_j - U(q_1, ..., q_N). \tag{1}$$

Wir nehmen an dass die Potentielle Energie ein Minimum für $q_i = q_{0,i}, \quad i = 1...N$ hat. Die Bewegung des Systems in der Nähe von $\vec{q} = \vec{q}_0$ ist eine Schwinkung. Um die Bewegung des Systems in der Nähe von $\vec{q} = \vec{q}_0$ zu beschreiben, entwickeln wir die Lagrangefunktiion in Taylorreihe in $\vec{\xi} = \vec{q} - \vec{q}_0$. Die Ausweichungen $|\vec{\xi}|$ sind klein; wie entwickeln die Lagrangefunktion bis zweiter Ordnung in ξ. Wie merken dass $\dot{q}_i = \dot{\xi}_i$ genauso klein is wie ξ_i selbst weil für Schwinkungen $\dot{\xi}_i \sim \omega\xi_i$ ist wobei ω die Frequenz der Schwinkungen enspricht. Das bedeuten dass in der kinetischen Energie, können wir $a_{ij}(q_1, ..., q_N)$ mit Konstanten $1/2m_{ij}$ erzätzen und die Potentiele Energie als

$$U(q_1, .., q_N) = U_0 + \frac{1}{2}k_{ij}\xi_i\xi_j + \mathcal{O}(\xi^3) \tag{2}$$

schreiben, wobei

$$k_{ij} = \frac{\partial U}{\partial q_i \partial q_j}|_{\vec{q}=\vec{q}_0} \tag{3}$$

ist.

Wir erhalten dann die universälle Lagrangefunktion welche die kleine Schwingungen der Systeme mit viele Freiheitsgraden beschreibt

$$L = \frac{1}{2}\sum_{ij}(m_{ij}\dot{\xi}_i\dot{\xi}_j - k_{ij}\xi_i\xi_j) \tag{4}$$

Die Koeffizienten m_{ij} und k_{ij} sind symmetrisch

$$m_{ij} = m_{ji}, \qquad k_{ij} = k_{ji}. \tag{5}$$

Die Euler-Lagrange Gleichungen lauten

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_i} = \frac{\partial L}{\partial \xi_i} \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{N}\left[m_{ij}\ddot{\xi}_j + k_{ij}\xi_j\right] = 0 \tag{6}$$

Die lätzte Gleichung können wir wie eine Matrizengleichung schreiben

$$\hat{m}\ddot{\vec{\xi}} + \hat{k}\vec{\xi} = 0, \tag{7}$$

wobei die Matrizen $\hat{m}, \hat{k}$ die Elementen m_{ij} und k_{ij} haben.

Wir nehmen an dass das System mit bestimmete Frequenz ω schwinkt. Wir schreiben dann

$$\vec{\xi} = \mathrm{Re}\left[\vec{a}e^{i\omega t + \varphi}\right], \tag{8}$$

setzen diesen Ansatz in der Gl.(6) ein und erhalten

$$\left[-\omega^2\hat{m} + \hat{k}\right]\vec{a} = 0. \tag{9}$$

Aus diese Gleichung Gl.(8) bekommen wir die frequenzen ω und die Amplituden $\vec{a}$ der Schwinkungen. Das passiert auf folgender Weise. Die homogene lineare Gleichung Gl.(8) hat nicht-triviale[1] Lösungen für die Amplitude $\vec{a}$ nur wen

$$\det\left[-\omega^2\hat{m} + \hat{k}\right] = 0. \tag{10}$$

Die Eigenfrequenzen die Systems folgen von diese Gleichung. Für ein System mit N-Freiheitsgraden gibt N-Eigenfrequenzen aber mänche können entartet sein. Nach dem die Frequenzen vorhanden sind, bestimmt man die Amplituden aus Gl.(8).

Die Frequenzen und Amplituden haben wichtige Eigenschaften. Zum Beispiel, wir multiplizieren Gl.(8) mit transponiertem vector $\vec{a}$ und erhalten[2]

$$\omega^2 = \frac{\vec{a}_i\hat{k}_{ij}\vec{a}_j}{\vec{a}_i m_{ij}\vec{a}_j}. \tag{11}$$

Die Matrizen $\hat{m}$ und $\hat{k}$ sollen positiv sein, d.h.

$$\omega^2 > 0 \tag{12}$$

und alle Frequenzen sind reel.

Eine andere Eigenschaft ist die "Orthogonalität" die Amplituden die verschiedene Frequenzen entsprechen. Bezeichen wir die Frequenzen mit einem Label s. Dann gilt

$$\begin{aligned} &-\omega_s^2 m_{ij}a_j^{(s)} + k_{ij}a_j^{(s)} = 0 \\ &-\omega_{s'}^2 m_{ij}a_j^{(s')} + k_{ij}a_j^{(s')} = 0 \end{aligned} \tag{13}$$

Wir multiplizieren die erste Gleichung mit $a_i^{(s)}$, die zweite mit $a_j^{(s')}$ und summieren über i. Wir bekommen

$$\begin{aligned} \omega_s^2 a_i^{(s')} m_{ij} a_j^{(s)} &= a_i^{(s')} k_{ij} a_j^{(s)}, \\ \omega_{s'}^2 a_i^{(s)} m_{ij} a_j^{(s')} &= a_i^{(s)} k_{ij} a_j^{(s')}, \end{aligned} \tag{14}$$

Die Matrizen $\hat{m}$ und $\hat{k}$ sind symmetrisch, das bedeuten das die rechten Seiten gleich sind. Wir subtrahieren die zwei Gleichungen Gl.(13) aus ein andere und erhalten

$$(\omega_s^2 - \omega_{s'}^2) a_i^{(s')} m_{ij} a_j^{(s)} = 0. \tag{15}$$

[1] "Nicht-triviale" bedeuten $\vec{a} \neq 0$.

[2] Zur Errinerung: zwei identische Indizen in einer Formul bedeuten dass man über diese Indizen summieren muss.

Das bedeutet dass falls $\omega_s \neq \omega_{s'}$ ist, gilt

$$a_i^{(s')} m_{ij} a_j^{(s)} = 0, \qquad a_i^{(s')} k_{ij} a_j^{(s)} = 0. \tag{16}$$

Wir können die Amplituden so normieren dass die folgende Gleichung gilt

$$a_i^{(s')} m_{ij} a_j^{(s)} = \delta^{ss'}, \qquad a_i^{(s')} k_{ij} a_j^{(s)} = \omega_s^2 \delta_{ss'}. \tag{17}$$

Diese "Orthogonalität"-Relationen für Amplituden kann man benutzen um die Berechnung von Eingenamplituden zu vereinfachen. Falls es in einem System entartende Frequenzen gibt, sind die entsprechenden Amplituden nicht unbedinkt orthogonal (in dem Sinne von Gl.(15); es ist allerdings möglich die entartete Amplituden so zu wählen dass die orthogonal zu ein andere sind.

Angenomen dass wir die Eigenfrequenzen und die Eigenamplituden berechnet haben und dass Alle Diese N-unabhängige Vektoren können wir als die Basis benutzen. Wir schreiben dann

$$\vec{\xi} = \sum_{s=1}^{N} r_s \vec{a}^{(s)}, \tag{18}$$

wobei r_s die Koordinaten den (N-dimensionale) Vektor $\vec{\xi}$ in der neuen Basis sind. Wir nennen diese Koordinaten "Normalkoordinaten".

Wir benutzen dann die Gl.(17) um die Lagrangefunktionen Gl.(3) umzuschreiben. Mit Hilfe Gl.(16) erhalten wir

$$2U = \sum_{ij} k_{ij} \xi_i \xi_j = \sum_{s,s'} r_s r_{s'} \sum_{ij} k_{ij} a_i^{(s')} a_j^{(s)} = \sum_{s,s'} r_s r_{s'} \delta_{ss'} \omega_s^2 = \sum_s \omega_s^2 \, r_s^2. \tag{19}$$

und

$$2T = \sum_{ij} m_{ij} \dot{\xi}_i \dot{\xi}_j = \sum_{s,s'} \dot{r}_s \dot{r}_{s'} \sum_{ij} m_{ij} a_i^{(s')} a_j^{(s)} = \sum_{s,s'} \dot{r}_s \dot{r}_{s'} \delta_{ss'} = \sum_s \dot{r}_s^2. \tag{20}$$

Wir erhalten

$$L = \frac{1}{2} \sum_s \left[\dot{r}_s^2 - \omega_s^2 r_s^2 \right]. \tag{21}$$

Es foglt von Lagrangefunktion Gl.(20) dass die Bewegunsgleichungen in Normalkoordianten unabhängig von ein andere sind. Die Euler-Lagrange Gleichung ist dann

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_s} = \frac{\partial L}{\partial r_s}, \quad \Rightarrow \quad \ddot{r}_s + \omega_s^2 r_s = 0. \tag{22}$$

Die Zeitabhängigkeit der Noormalkoordianten ist dann

$$r_s = C_s \cos(\omega_s t + \varphi_s). \tag{23}$$

Die allgemeine Lösung für die Abweichung $\vec{\xi}$ ist dann

$$\vec{\xi}(t) = \sum_{s=1}^{N} C_s \vec{a}_s \cos(\omega_s t + \varphi_s) \tag{24}$$

In dieser Lösung haben wir $2N$ Konstanten ($C_s, \varphi_s,\ s = 1...N$), die wir wählen um die Randbedingugen zu erfühlen.

Wir betrachten ein Beispiel. Die Lagrangefuntion lautet

$$L = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\dot{y}^2 - \frac{\omega_0^2}{2}\left(x^2 + y^2 - 2\alpha xy\right). \tag{25}$$

Das bedeutet dass die Matrizen $\hat{m}$, $\hat{k}$ so aussehen

$$\hat{m} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{k} = \omega_0^2 \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix}. \tag{26}$$

Die Matrize $\hat{O} = -\omega^2 \hat{m} + \hat{k}$ ist dann

$$\hat{O} = \begin{pmatrix} -\omega^2 + \omega_0^2 & -\alpha\omega_0^2 \\ -\alpha\omega_0^2 & -\omega^2 + \omega_0^2 \end{pmatrix}. \tag{27}$$

Die Determinante diese Matrix muss eine Null sein

$$\det\left[-\omega^2\hat{m} + \hat{k}\right] = (\omega^2 - \omega_0^2)^2 - \alpha^2\omega_0^4 = 0. \tag{28}$$

D.h. die mögliche Eigenfrequenzen sind

$$\omega^2 - \omega_0^2 = \pm\alpha\omega_0^2 \Rightarrow \omega_\pm^2 = \omega_0^2\left(1 \pm \alpha\right). \tag{29}$$

Finden wir in dem wir $\mathcal{O}(\omega_\pm^2)$ berecechnen und dann die Amplituden. Wir erhalten

$$\hat{\mathcal{O}}_\pm = \hat{\mathcal{O}}|_{\omega=\omega_\pm}, \tag{30}$$

wo

$$\hat{\mathcal{O}}_{\omega_\pm} = -\omega_0^2 \begin{pmatrix} \pm\alpha & \alpha \\ \alpha & \pm\alpha \end{pmatrix}. \tag{31}$$

Wir finden die Eigenamplituden

$$\hat{\mathcal{O}}_\pm \vec{a}_\pm = 0, \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{32}$$

Die Eigenamplituden sind richtig normiert; z.B.

$$\vec{a}_+^T \hat{m} \vec{a}_+ = 1. \tag{33}$$

Wir machen jetz die Variablentransformation zu den Normalkoordinaten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = r_+\vec{a}_+ + r_-\vec{a}_-. \tag{34}$$

Dann

$$x = \frac{r_+ + r_-}{\sqrt{2}}, \quad y = \frac{-r_+ + r_-}{\sqrt{2}}, \tag{35}$$

sodass

$$L = \frac{\dot{r}_+^2}{2} + \frac{\dot{r}_-^2}{2} - \frac{\omega_+^2}{2} r_+^2 - \frac{\omega_-^2}{2} r_-^2. \tag{36}$$

Die allgemeine Lösung ist dann

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{C_+}{\sqrt{2}} \cos(\omega_+ t + \varphi_+) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{C_-}{\sqrt{2}} \cos(\omega_- t + \varphi_-) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{37}$$

Die Konstanten $C_\pm, \phi_\pm$ wählt man so dass die Randbedingugen erfühlt sind.

Normalkoordinaten sind auch nutzlich um die erzwungende Schwinkugen in Systemen mit viele Freiheitsgraden zu untersuchen. In der Tat, die universälle lagrangefunktion in dem Fall lautet

$$L = \frac{1}{2} \sum_{ij} \left[m_{ij} \dot{\xi}_i \dot{\xi}_k - k_{ij} \xi_i \xi_j \right] + \sum_i f_i(t) \xi_i. \tag{38}$$

Um die Erzwungenden Schwinkugen zu studieren finden wir die Normalkoordinaten und schreieben die Lagrangfunktion um

$$L = \frac{1}{2} \sum_s \left[\dot{r}_s^2 - \omega_s^2 r_s^2 \right] - \sum_s f_s(t) r_s, \tag{39}$$

wobei

$$f_s(t) = \sum_i f_i(t) a_i^{(s)} = \vec{f}(t) \cdot \vec{a}^{(s)}. \tag{40}$$

Es folgt aus Gl.(38,39) das die erzwungende Schwinkugen einer Normalkoordinate unabhändig von andere Normalkoordianten passieren. Die Stärke die erzwingunde Kraft für eine Eigenfrequenze ω_s durch der Projektion den Kraftsvektor $\vec{f}$ and der Eigenamplitude $\vec{a}^{(s)}$ gegeben ist. Für harmonische Kraft $\vec{f}(t) \sim \cos(\omega t + \phi)$ gibt die Resonanz falls ω gleich eine von Eigenfrequenzen ist, falls die Projektion von $\vec{f}$ auf entsprechender Eigenamplitude von Null verschieden ist.

Wir können die Berechnung von Amplituden stark vereinfachen in dem wir die Symmetrien der Lagrangefunktion benutzen. Wir nehmen an das die Lagrangefunktion unter folgenden Transformation invariant ist

$$\xi_i \to \xi_i' = S_{ij} \xi_j, \tag{41}$$

wobei die Matrize $\hat{S}$ folgende Gleichung erfühlt

$$\hat{S}^2 = 1. \tag{42}$$

Diese zwei Gleichungen bedeuten dass die Matrizen $\hat{m}$ und $\hat{k}$ folgenden Gleichungen erfühlen

$$S^T \hat{m} S = \hat{m}, \quad S^T \hat{k} S = \hat{k}. \tag{43}$$

Die Gleichung die Eigenamplitude $\vec{a}_s$ erfühlt lautet

$$\left[-\omega_s^2 \hat{m} + \hat{k} \right] \vec{a}_s = 0. \tag{44}$$

Wir multiplizieren diese Gleichung mit S^T von links and benutzen $SS = 1$ um zu schreiben

$$0 = \left[-\omega_s^2 \hat{m} + \hat{k}\right] \vec{a}_s = S^T \left[-\omega_s^2 \hat{m} + \hat{k}\right] \; 1 \; \vec{a}_s = S^T \left[-\omega_s^2 \hat{m} + \hat{k}\right] \; SS \; \vec{a}_s = \left[-\omega_s^2 \hat{m} + \hat{k}\right] S \; \vec{a}_s \tag{45}$$

Diese Gleichung bedeuten dass nicht nur $\vec{a}_s$ sondern auch $S\vec{a}_s$ die Eigenamplitude mit der Frequenz ω_s ist. Stellen wir uns vor dass die Schwinkung mit dieser Frequenz nicht entartet ist. Dann muss gelten

$$S\vec{a}_s = \lambda \vec{a}_s. \tag{46}$$

Wir multiplizieren diese Gleichung mit S, benutzen $S^2 = 1$ und erhalten

$$1 = \lambda^2, \quad \lambda = \pm 1. \tag{47}$$

Das bedeutet der Vektor $\vec{a}_s$ der Eigenvektor der Matrize S mit dem Eigenwert ± 1 ist. Diese Eigenschaft die Eigenamplituden kann man verwenden um die Berechnung in komplizierten (aber symmetrischen) Fälle zu vereinfachen.

Als Beispiel betrachten wir drei Teilchen die mit zwei Federn miteinandere verbunden sind. Die Largangefunktion lautet

$$L = \frac{m\dot{x}_1^2}{2} + \frac{M\dot{x}_2^2}{2} + \frac{m\dot{x}_3^2}{2} - \frac{k}{2}(x_1 - x_2)^2 - \frac{k}{2}(x_3 - x_2)^2, \tag{48}$$

wobei $x_{1,2,3}$ die Abweichungen von Gleichgewichtpositionen beschreiben.

Diese Lagrangefunktion ist invariant unter der Vertauschung von x_1 und x_3. Wir können diese Transformation mit der folgenden Matrize beschreiben

$$\hat{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{49}$$

sodass

$$S \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}. \tag{50}$$

Wir können auch feststellen dass $S^2 = 1$ erfühlt ist. Unsere Diskussion zur Folge, sollen die Eigenamplituden dann entweder symmetrisch oder antisymmetrisch unter die Transformation $x_1 \leftrightarrow x_3$ sein.

Wir fangen an mit der *antisymmetrischen* Amplitude. Diese Amplitude muss dann so aussehen

$$\vec{\xi}(t) = e^{i\omega t} \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ x \end{pmatrix}. \tag{51}$$

Um $x(t)$ zu bestimmen, benutzen wir die Bewegungsgleichungen für x_1 die aus der Lagrangfunktion Gl.(47) folgen

$$m\ddot{x}_1 + k(x_1 - x_2) = 0, \tag{52}$$

setzen den Anzats Gl.(50) ein und erhalten

$$\left(-\omega^2 m + k\right) x = 0. \tag{53}$$

Das bedeutet dass die (normierte) Eigenfrequenz und die Eigenamplitude für antisymmetrische Schwinkung lauten

$$\omega_1^2 = \frac{k}{m}, \quad \vec{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{54}$$

Der symmetrische Fall ist etwas komplizierte. In dem Fall gibt eine Lösung die man raten kann. Diese Lösung entspricht eine freie Bewegung von drei Teilchen ohne schwinkugen. Dann

$$\omega_2 = 0, \quad \vec{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{2m + M}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{55}$$

Die zweite symmetrische Schwinkung muss dann so aussehen

$$\vec{\xi}(t) = e^{i\omega t} \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix}. \tag{56}$$

Es ist einfach das Verhältnis zwischen x und y zu bestimmen weil verschiedene Eigenamplituden orthogonal (mit der Matrize $\hat{m}$) sein soll. Dann muss gelten

$$(1,1,1) \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} = 0. \tag{57}$$

Aus diese Gleichung erhalten wir

$$y = -\frac{2m}{M} x, \tag{58}$$

so dass die Eigenamplitude lautet

$$\vec{a}_3 = \sqrt{\frac{M}{2m(2m + M)}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2m}{M} \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{59}$$

Un die Eigenfrequenz zu finden, benutzen wir Gl.(51) noch ein mal und setzen dort $x_1 \to x$ und $x_2 \to y = -2m/Mx$ ein. Wir erhalten

$$\left[-m\omega^2 + k\left(1 + \frac{2m}{M}\right)\right] x = 0. \tag{60}$$

Es folgt

$$\omega_3^2 = \frac{k}{m} \frac{M + 2m}{M}. \tag{61}$$

Um das lätztes Beispiel zusammen zu fassen: wir haben alle Eigenfrequenzen und Eigenamplituden eines kompliziertes Systems gefunden ohne die Determinante zu berechnen. Die Symmetrien und die Bewegungsgleichungen habe sehr wichtige Role gespielt.