Vorlesung 6: Kleine Schwingungen in einer Dimension

1. Freie Schwingungen: Eine sehr wichtige Art von Bewegung sind kleine Schwingungen. Der Grund dafür ist, dass kleine Schwingungen in der Nähe von Gleichgewichten auftreten und viele physikalische Systeme sich nicht weit außerhalb des Gleichgewichts befinden. Es ist auch sehr wichtig, dass kleine Schwingungen eine universelle Art von Bewegung darstellen. Um das zu zeigen, betrachten wir eine allgemeine Lagrangefunktion

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x), \tag{1}$$

und nehmen an, dass $U(x)$ ein Minimum bei $x = x_0$ hat. Uns interessiert die Bewegung in der Nähe des Minimums. Wir führen die neue Koordinate $x = x_0 + \xi$ ein und erhalten

$$L = \frac{m\dot{\xi}^2}{2} - U(x_0 + \xi). \tag{2}$$

Falls ξ klein ist, können wir $U(x_0 + \xi)$ in eine Taylorreihe entwickeln

$$U(x_0 + \xi) \approx U(x_0) + \left.\frac{\mathrm{d}U(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0} \xi + \frac{1}{2!}\left.\frac{\mathrm{d}^2U(x)}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=x_0} \xi^2 + \mathcal{O}(\xi^3) \tag{3}$$

Weil x_0 ein Minimum ist, gilt $\mathrm{d}U/\mathrm{d}x|_{x=x_0} = 0$. Das bedeutet, dass wir die Lagrangefunktion Gl. (2) so schreiben können

$$L = \frac{m\dot{\xi}^2}{2} - \frac{k\xi^2}{2} + \mathcal{O}(\xi^3), \tag{4}$$

wobei

$$k = \left.\frac{\mathrm{d}^2U(x)}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=x_0} \tag{5}$$

ist. Der Parameter k ist positiv, weil x_0 ein Minimum ist. Falls wir nur kleine Schwingungen betrachten wollen (d.h. Schwingungen mit kleiner Amplitude), können wir alle $\mathcal{O}(\xi^3)$-Beiträge vernachlässigen. Dann erhalten wir die Lagrangefunktion

$$L = \frac{m\dot{\xi}^2}{2} - \frac{k\xi^2}{2}, \tag{6}$$

die kleine Schwingungen beschreibt. Diese Funktion ist universell; das einzige was von einem bestimmten Potential abhängt, ist der Parameter k, der durch die zweite Ableitung der potentiellen Energie am Punkt des Minimums gegeben ist, siehe Gl. (5).

Als Beispiel betrachten wir zwei Potentiale

$$U_1(x) = -\frac{\alpha}{2}x^2 + \frac{\beta}{4}x^4 \tag{7}$$

und

$$U_2(x) = \frac{-U_0}{\cosh^2(\gamma x)}. \tag{8}$$

Die Potentiale sind unterschiedlich. Trotzdem gibt es in beiden Fällen Minima. Für U_1 gibt zwei Minima, bei $x = \pm\sqrt{\alpha/\beta}$, und für U_2 ist das Minimum bei $x = 0$. In der Nähe des Minimums bei $x = x_p = \sqrt{\alpha/\beta}$ können wir U_1 als Taylor-Reihe darstellen und erhalten

$$U_1(x) \approx -\frac{\alpha^2}{4\beta} + \frac{1}{2}(2\alpha)\,(x - x_p)^2 + \mathcal{O}((x - x_p)^3). \tag{9}$$

Wir nehmen die Entfernung von x_p als die neue Koordinate $\xi = x - x_p$ und erhalten für $U_1(x)$

$$k = 2\alpha. \tag{10}$$

Analog könnten wir für das andere Minimum vorgehen.

Für U_2, konstruieren wir die Taylor-Reihe in der Nähe von $x = 0$ und erhalten

$$U_2(x) = -U_0 + \gamma^2 U_0 x^2 + \mathcal{O}(x^3). \tag{11}$$

Das bedeutet, dass wir in diesem Fall

$$k = 2U_0\gamma^2 \tag{12}$$

erhalten.

Wir sehen, dass kleine Schwingungen immer in einem quadratischen Potential (lineare Kraft) stattfinden; die einzige Information, die von der unterliegenden Theorie bleibt, ist das Verhältnis zwischen k und der zweiten Ableitung des ursprünglichen Potentials, Gl. (5). Wir konzentrieren uns jetzt auf die *universelle* Lagrangefunktion, die kleine Schwingungen beschreibt, Gl. (6). Die Euler-Lagrange Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} = \frac{\partial L}{\partial \xi} \tag{13}$$

ergibt

$$m\ddot{\xi} + k\xi = 0. \tag{14}$$

Die Lösung ist

$$\xi(t) = A\cos(\omega t + \varphi), \tag{15}$$

wobei

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \tag{16}$$

A die Amplitude und φ die Phase der Schwingungen heißen. Die Amplitude und die Phase bestimmt man durch die Randbedingungen, z.B.

$$\xi(0) = A\cos(\varphi), \qquad \dot{\xi}(0) = -A\omega\sin(\varphi). \tag{17}$$

2. Erzwungene Schwingungen: Wir betrachten jetzt die Situation, in der eine externe zeitabhängige Kraft die Schwingungen beeinflusst. Die Lagrangefunktion lautet

$$L = \frac{m\dot{\xi}^2}{2} - \frac{m\omega^2\xi^2}{2} + \xi F(t). \tag{18}$$

Daraus folgt die Bewegungsgleichung

$$\ddot{\xi} + \omega^2 \xi = \frac{F(t)}{m}. \tag{19}$$

Als erstes Beispiel betrachten wir eine harmonische Kraft

$$F(t) = F_0 \cos(\gamma t + \beta). \tag{20}$$

Um Gl. (19) zu lösen, schreiben wir ξ als eine Linearkombination aus der allgemeinen Lösung der freien (homogenen) Gleichung und der speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung

$$\xi(t) = A \cos(\omega t + \varphi) + A_f \cos(\gamma t + \beta). \tag{21}$$

Wir benutzen diesen Ansatz in Gl. (19) und erhalten

$$A_f \left(-\gamma^2 + \omega^2\right) = \frac{F_0}{m}, \tag{22}$$

sodass

$$A_f = \frac{F_0}{m\left(\omega^2 - \gamma^2\right)}. \tag{23}$$

Die vollständige Lösung ist dann

$$\xi(t) = A \cos(\omega t + \varphi) + \frac{F_0}{m\left(\omega^2 - \gamma^2\right)} \cos(\gamma t + \beta). \tag{24}$$

Die Randbedingungen können wir erfüllen, indem wir die zwei Parameter A und φ geeignet wählen.

Was passiert im Falle wenn die Eigenfrequenz der Schwingungen ω und die Frequenz der externen Kraft γ ähnlich sind, $\gamma \to \omega$? Wir sehen, dass in diesem Fall die Amplitude des Schwingungen sehr groß ist. Um den Limes $\gamma = \omega$ zu berechnen, machen wir Folgendes. Wir schreiben Gl. (24) um

$$\xi(t) = \tilde{A} \cos(\omega t + \tilde{\varphi}) + \frac{F_0}{m\left(\omega^2 - \gamma^2\right)} \left(\cos(\gamma t + \beta) - \cos(\omega t + \beta)\right), \tag{25}$$

sodass wir die allgemeine Lösung umdefiniert haben. Dann benutzen wir

$$\cos(\gamma t+\beta)-\cos(\omega t+\beta) = 2\sin((\gamma+\omega)t/2+\beta)\sin((\omega-\gamma)t/2) \approx (\omega-\gamma)t\ \sin(\omega t+\beta). \tag{26}$$

Wir benutzen Gl. (26) in Gl. (25) und erhalten

$$\xi(t)|_{\gamma=\omega} = \tilde{A} \cos(\omega t + \tilde{\varphi}) + \frac{F_0 t}{2m\omega} \sin(\omega t + \beta). \tag{27}$$

Wir sehen, dass im Fall $\gamma = \omega$ (Resonanzfall) die Amplitude linear mit der Zeit wächst. Das bedeutet, dass wir nach einer bestimmten Zeit nicht mehr von kleinen Schwingungen reden können. Wir werden später diskutieren, was mit der Resonanz passiert, falls wir Reibungskräfte berücksichtigen. Momentan aber gehen wir zurück zu Gl. (19) und diskutieren, wie diese Gleichung für allgemeine Kraft $F(t)$ gelöst werden kann.

Wir schreiben die Gl. (19) so um

$$\ddot{\xi} + \omega^2 \xi = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + i\omega\right] \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - i\omega\right] \xi = \frac{F(t)}{m}. \tag{28}$$

Wir führen dann eine neue Variable ein

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - i\omega\right] \xi = \rho(t) \tag{29}$$

und erhalten die neue Gleichung für ρ

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + i\omega\right] \rho(t) = \frac{F(t)}{m}. \tag{30}$$

Das ist eine Differentialgleichung erster Ordnung, sodass es einfach ist, die Lösung zu finden.

Wir suchen nach einer speziellen Lösung mit Hilfe der Methode "Variation der Konstanten" und schreiben

$$\rho(t) = C(t) e^{-i\omega t}, \tag{31}$$

und erhalten die Differentialgleichung für $C(t)$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} C(t) = \frac{F(t)}{m} e^{i\omega t}. \tag{32}$$

Direkte Integration ergibt

$$C(t) = \int_0^t \mathrm{d}\tau \frac{F(\tau)}{m}\, e^{i\omega\tau}. \tag{33}$$

Um $\xi(t)$ zu finden, benutzen wir die Definition von ρ, Gl. (29). Weil wir eine reelle Lösung $\xi(t)$ suchen, folgt aus Gl. (29) folgende Gleichung

$$\xi(t) = -\mathrm{Im}\left[\frac{\rho(t)}{\omega}\right]. \tag{34}$$

Wir berechnen den Imaginärteil und erhalten die spezielle Lösung für eine beliebige zeitabhängige Kraft

$$\xi(t) = \int_0^t \mathrm{d}\tau\, \frac{F(\tau)}{m\omega}\, \sin(\omega(t-\tau)). \tag{35}$$

3. Freie Schwingungen mit Reibung: Was passiert mit den Schwingungen, wenn eine Reibungskraft vorhanden ist? Wir nehmen an, dass die Reibungskraft proportional zur Geschwindigkeit ist, $f_R = -2m\kappa\dot{\xi}$, und erhalten die Bewegungsgleichung

$$\ddot{\xi} + 2\kappa\dot{\xi} + \omega^2 \xi = 0. \tag{36}$$

Um diese Gleichung zu lösen, suchen wir die Lösungen in der Exponentialform

$$\xi = Ae^{i\lambda t}. \tag{37}$$

Wir setzen diesen Ansatz in Gl. (36) ein und erhalten eine Gleichung für λ

$$-\lambda^2 + 2i\kappa\lambda + \omega^2 = 0. \tag{38}$$

Es gibt zwei Lösungen

$$\lambda_\pm = i\kappa \pm \sqrt{\omega^2 - \kappa^2}. \tag{39}$$

Wir können aus diesen zwei Lösungen die allgemeine Lösung für Schwingungen mit Reibung konstruieren

$$\xi(t) = \mathrm{Re}\left[A_1 e^{i\lambda_+ t} + A_2 e^{i\lambda_- t}\right], \tag{40}$$

wobei $A_{1,2}$ zwei Konstanten sind.

Es ist nützlich, zwei Fälle zu unterscheiden. Für *schwache* Reibung gilt $\omega > \kappa$. In diesem Fall sieht die allgemeine Lösung so aus

$$\xi(t) = Ae^{-\kappa t}\cos\left(\omega t\sqrt{1 - \frac{\kappa^2}{\omega^2}} + \varphi\right) \tag{41}$$

Für *starke* Reibung ist $\kappa > \omega$, so dass $\lambda_\pm$ imaginär sind. Dann

$$\xi(t) = A_1 e^{-t(\kappa + \sqrt{\kappa^2 - \omega^2})} + A_2 e^{-t(\kappa - \sqrt{\kappa^2 - \omega^2})}, \tag{42}$$

wobei $A_{1,2}$ reell sind.

4. Erzwungene Schwingungen mit Reibung: Wir betrachten dann die erzwungenen Schwingungen mit Reibung. Die Kraft ist harmonisch. Die Bewegungsgleichung lautet

$$\ddot{\xi} + 2\kappa\dot{\xi} + \omega^2\xi = \frac{F_0}{m}\cos(\gamma t + \beta). \tag{43}$$

Wir suchen nach der speziellen Lösung

$$\xi = \mathrm{Re}\left[Ae^{i(\gamma t + \beta)}\right]. \tag{44}$$

Wir erhalten

$$(\omega^2 - \gamma^2 + 2i\kappa\gamma)A = \frac{F_0}{2m}, \tag{45}$$

sodass

$$A = \frac{F_0}{2m}\,\frac{1}{\omega^2 - \gamma^2 + 2i\kappa\gamma}. \tag{46}$$

Es ist nützlich, die komplexe Größe A als Betrag und Phase umzuschreiben; wir erhalten

$$A = \frac{F_0}{2m}\,\frac{e^{i\phi}}{\sqrt{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4\kappa^2\gamma^2}}, \tag{47}$$

mit

$$\phi = \arctan \frac{2\kappa\gamma}{\gamma^2 - \omega^2}. \tag{48}$$

Die spezielle Lösung folgt

$$\xi(t) = \mathrm{Re}\left[Ae^{i(\gamma t+\beta)}\right] = \frac{F_0}{2m}\,\frac{\cos(\gamma t + \beta + \phi)}{\sqrt{(\omega^2-\gamma^2)^2 + 4\kappa^2\gamma^2}} \tag{49}$$

Wir sehen, dass für Schwingungen mit Reibung eine relative Phase zwischen der Kraft und der Verschiebung $\xi(t)$ existiert. Im Resonanzfall ist die Amplitude der Schwingungen endlich

$$\lim_{\gamma\to\omega} \frac{F_0}{2m}\,\frac{1}{\sqrt{(\omega^2-\gamma^2)^2 + 4\kappa^2\gamma^2}} = \frac{F_0}{4m\kappa\omega}, \tag{50}$$

aber die relative Phase ändert sich ganz plötzlich bei $\gamma = \omega$

$$\lim_{\gamma\to\omega-0} \phi = -\frac{\pi}{2}, \qquad\qquad \lim_{\gamma\to\omega+0} \phi = \frac{\pi}{2}. \tag{51}$$