

## Vorlesung 5: Streuung von Teilchen

Die Streuung von Teilchen ist eine wichtige indirekte Methode, um physikalische Systeme zu untersuchen, die wir anders gar nicht erreichen können. Streuexperimente funktionieren folgendermaßen: Wir schicken ein Teilchen mit gegebenem Impuls von  $\vec{r} = \infty$  in die Richtung des Kraftzentrums. Das Teilchen wechselwirkt mit dem Kraftzentrum und falls es genug Energie hat oder falls die Wechselwirkung abstoßend ist, fliegt es ins Unendliche zurück. Wir studieren das Verhältnis zwischen dem sogenannten Stoßparameter und dem Streuwinkel und versuchen aus diesem Verhältnis Erkenntnisse über das Kraftfeld zu gewinnen.

Wir werden uns hier nur mit Zentralkräften beschäftigen. In diesem Fall sind die Energie und der Drehimpuls erhalten. Die Werte der Energie und des Drehimpulses können wir bei  $\vec{r} = \infty$  ausrechnen. Dort haben wir

$$\lim_{r \rightarrow \infty} U(r) \rightarrow 0. \quad (1)$$

Für unser Teilchen bedeutet das, dass das Teilchen bei  $\vec{r} = \infty$  nur kinetische Energie hat. Falls wir die Geschwindigkeit des Teilchens bei  $\vec{r} = \infty$  mit  $v_\infty$  bezeichnen, lautet die Energie

$$E = \frac{mv_\infty^2}{2}. \quad (2)$$

Wir parametrisieren den Ortsvektor  $\vec{r}$  als

$$\vec{r} = z\vec{n} + \vec{\rho}, \quad \vec{n} \cdot \vec{\rho} = 0. \quad (3)$$

und definieren  $\vec{r} = \infty$  als  $z \rightarrow \infty$ . Die Geschwindigkeit bei  $\vec{r} = \infty$  ist  $\vec{v}_\infty = v_\infty \vec{n}$ . Wir berechnen dann den Drehimpuls. Falls dieser eine Erhaltungsgröße ist, können wir den bei  $\vec{r} = \infty$  ausgerechneten Drehimpuls während des gesamten Stoßprozesses verwenden. Wir erhalten

$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{p}] = m [(z\vec{n} + \vec{\rho}) \times \vec{v}_\infty] = m [\vec{\rho} \times \vec{v}_\infty], \quad (4)$$

sodass

$$M = |\vec{M}| = mv_\infty \rho. \quad (5)$$

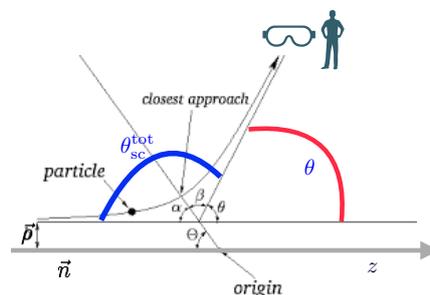


Abbildung 1: Das Streuexperiment.

Der Streuwinkel  $\theta_{\text{sc}}$  (siehe Abb. 1) ist abhängig von  $r$

$$\theta_{\text{sc}}(r) = \frac{M}{2m} \int_r^\infty \frac{d\bar{r}}{\bar{r}^2 \sqrt{\frac{2}{m} (E - U_{\text{eff}}(\bar{r}))}} \quad (6)$$

Der minimale Wert von  $r$  ist  $r_{\text{min}}$  und den vollen Streuwinkel schreiben wir als

$$\theta = \pi - 2\theta_{\text{sc}}(r_{\text{min}}) = \pi - 2\rho \int_{r_{\text{min}}}^\infty \frac{dr}{r^2 \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{2U(r)}{mv_\infty^2}}} \quad (7)$$

Diese Gleichung erlaubt es uns, die Abhängigkeit des Streuwinkels vom Stoßparameter  $\rho$  zu bestimmen.

Wir stellen uns nun vor, dass wir einen Strahl von Teilchen mit der Energie  $E$  aus dem Unendlichen zum Kraftzentrum schicken. Die Dichte der Teilchen in dem Strahl ist  $n$ . Die Zahl der Teilchen, die durch die Fläche  $2\pi\rho d\rho$  pro Zeiteinheit fliegen ist

$$dN = 2\pi\rho d\rho n v_\infty. \quad (8)$$

Diese Teilchen werden um den Winkel  $\theta(\rho)$  gestreut. Der Teilchenstrom  $J$  ist  $J = n v_\infty$ . Der Wirkungsquerschnitt ist dann das Verhältnis zwischen der Zahl gestreuter Teilchen und dem Teilchenstrom der einfallenden Teilchen

$$d\sigma = \frac{dN}{J} = 2\pi\rho(\theta) d\rho(\theta). \quad (9)$$

Der Wirkungsquerschnitt hat also die Dimension einer Fläche. Er kann so interpretiert werden, dass dem Streuprozess eine fiktive Fläche zugeordnet wird, die gerade so groß ist, dass die Wahrscheinlichkeit, dass ein einfallendes punktförmiges Teilchen diese fiktive Fläche trifft, der Wahrscheinlichkeit entspricht mit der das Teilchen gestreut wird. Diese Fläche muss nicht mit dem geometrischen Querschnitt des Streuzentrums übereinstimmen, wie wir im Folgenden sehen werden.

Der Wirkungsquerschnitt ist eine Funktion des Streuwinkels. Wir schreiben

$$d\sigma = 2\pi\rho(\theta) \left| \frac{d\rho}{d\theta} \right| d\theta. \quad (10)$$

Den totalen Wirkungsquerschnitt erhalten wir, indem wir  $d\sigma$  über alle möglichen Streurichtungen, also über  $\theta$  von  $\theta = 0$  bis  $\theta = \pi$ , integrieren

$$\sigma = \int_0^\pi d\theta \frac{d\sigma}{d\theta}. \quad (11)$$

Als Beispiel betrachten wir die Streuung an einer harten, unendlich schweren Kugel mit dem Radius  $R$ . Die entsprechende potentielle Energie lautet

$$U(r) = \begin{cases} 0, & r > R \\ \infty, & r < R \end{cases} \quad (12)$$

In diesem Fall ist der minimale Abstand zwischen Mittelpunkt der Kugel und dem Teilchen  $r_{\min} = R$ . Wir verwenden dann Gl. (7) und erhalten

$$\theta = \pi - 2\rho \int_R^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2}}} \quad (13)$$

Es ist offensichtlich, dass eine Streuung nur für  $\rho < R$  stattfindet.

Wir führen eine Variablentransformation ein,  $r \rightarrow \xi$ , wobei

$$r = \frac{\rho}{\xi} \quad (14)$$

und erhalten

$$\theta = \pi - 2 \int_0^{\rho/R} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}. \quad (15)$$

Wir substituieren  $\xi = \sin \varphi$  und erhalten

$$\theta = \pi - 2 \arcsin \left( \frac{\rho}{R} \right). \quad (16)$$

Im hier betrachteten Fall der Streuung an der harten, unendlich schweren Kugel entspricht dies gerade der geometrischen Situation, dass das einfallende Teilchen, entsprechend seinem Stoßparameter  $\rho$ , an der Oberfläche der Kugel gemäß ‘‘Einfallswinkel = Ausfallswinkel’’ gestreut wird. Wir schreiben diese Gleichung um als

$$\rho = R \cos \frac{\theta}{2}. \quad (17)$$

Um den Wirkungsquerschnitt zu berechnen, brauchen wir die Ableitung  $|d\rho/d\theta|$ . Wir erhalten

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{R \sin \theta/2}{2}. \quad (18)$$

Der differentielle Wirkungsquerschnitt ist dann

$$\frac{d\sigma}{d \cos \theta} = \frac{2\pi\rho(\theta)}{\sin \theta} \left| \frac{d\rho}{d\theta} \right|. \quad (19)$$

Wir erhalten

$$\frac{d\sigma}{d \cos \theta} = \frac{2\pi R^2 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}}{2 \sin \theta} = \frac{\pi R^2}{2}. \quad (20)$$

Somit lautet der totale Wirkungsquerschnitt

$$\sigma = \int_{-1}^1 d \cos \theta \frac{d\sigma}{d \cos \theta} = \pi R^2. \quad (21)$$

Hier stimmt also der totale Wirkungsquerschnitt mit dem geometrischen Querschnitt der Kugel überein.

Als zweites Beispiel betrachten wir die Streuung am Potential  $U(r) = \frac{\alpha}{r}$  (die sogenannte Rutherford-Streuung). Die Formel für den Streuwinkel lautet

$$\theta = \pi - 2\rho \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{2\alpha}{mv^2 r}}}, \quad (22)$$

wobei  $v = v_{\infty}$  ist. In der obigen Formel können wir  $r_{\min}$  bestimmen, indem wir die Nullstellen der Wurzel im Nenner finden.

Wir schreiben

$$1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{2\alpha}{mv^2 r} = 1 + \frac{\alpha^2}{m^2 v^4 \rho^2} - \left( \frac{\rho}{r} + \frac{\alpha}{mv^2 \rho} \right)^2, \quad (23)$$

führen eine Variablentransformation  $r \rightarrow \xi$  ein

$$\frac{\rho}{r} + \frac{\alpha}{mv^2 \rho} = \sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{m^2 v^4 \rho^2}} \sin \xi, \quad (24)$$

und erhalten

$$1 + \frac{\alpha^2}{m^2 v^4 \rho^2} - \left( \frac{\rho}{r} + \frac{\alpha}{mv^2 \rho} \right)^2 = \left( 1 + \frac{\alpha^2}{m^2 v^4 \rho^2} \right) (1 - \sin^2 \xi). \quad (25)$$

Der Punkt  $r_{\min}$  entspricht  $\xi = \pi/2$  und  $r = \infty$  entspricht

$$\xi|_{r=\infty} = \xi_0 = \arcsin \frac{\frac{\alpha}{mv^2 \rho}}{\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{m^2 v^4 \rho^2}}}. \quad (26)$$

Wir führen diese Variablentransformation in Gl. (22) aus und erhalten

$$\theta = \pi - 2 \int_{\xi_0}^{\pi/2} d\xi = 2\xi_0 = 2 \arcsin \frac{\frac{\alpha}{mv^2 \rho}}{\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{m^2 v^4 \rho^2}}}. \quad (27)$$

Diese Gleichung formen wir zu

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{\frac{\alpha}{mv^2 \rho}}{\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{m^2 v^4 \rho^2}}} \quad (28)$$

um und drücken  $\rho$  als Funktion von  $\theta$  aus. Wir erhalten

$$\rho = \frac{\alpha}{mv^2 \tan \frac{\theta}{2}}. \quad (29)$$

Um den Wirkungsquerschnitt zu berechnen, brauchen wir die Ableitung von  $\rho$  nach  $\theta$ ; sie lautet

$$\left| \frac{d\rho}{d\theta} \right| = \frac{\alpha}{mv^2} \frac{1}{\tan^2 \frac{\theta}{2}} \frac{1}{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}. \quad (30)$$

Wir sind letztendlich in der Lage, den differentiellen Wirkungsquerschnitt aufzuschreiben

$$\frac{d\sigma}{d \cos \theta} = 2\pi \rho(\theta) \left| \frac{d\rho}{d \cos \theta} \right| = \frac{2\pi \rho(\theta)}{\sin \theta} \left| \frac{d\rho}{d\theta} \right| = 2\pi \left( \frac{\alpha}{2mv^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}. \quad (31)$$

Im Prinzip sollten wir den totalen Wirkungsquerschnitt erhalten, indem wir  $d\sigma/d \cos \theta$  über  $\cos \theta$  integrieren. Es ist aber einfach zu sehen, dass das Integral unendlich ist. In der Tat haben wir für kleinen Streuwinkel  $\theta$

$$\sin \frac{\theta}{2} \approx \frac{\theta}{2}, \quad d \cos \theta = \sin \theta d\theta \approx \theta d\theta, \quad \frac{d\sigma}{d \cos \theta} \approx \frac{d\sigma}{\theta d\theta} \approx \left( \frac{\alpha}{2mv^2} \right)^2 \frac{32\pi}{\theta^4}. \quad (32)$$

Der totale Wirkungsquerschnitt ist dann unendlich

$$\sigma_{\text{tot}} = \int_0^\pi \frac{d\sigma}{d\theta} d\theta \approx \left( \frac{\alpha}{2mv^2} \right)^2 \int_0^\pi \frac{32\pi}{\theta^3} d\theta = \infty. \quad (33)$$

Wir haben zwei Beispiele gesehen – im ersten Beispiel war der totale Wirkungsquerschnitt endlich und im zweiten Beispiel unendlich. Wir haben auch gesehen, dass der Wirkungsquerschnitt für Rutherford-Streuung unendlich ist wegen der Kleinwinkelstreuung. Um das besser zu verstehen, betrachten wir den Limes kleiner Kraft oder, äquivalent, den Limes sehr hoher Energie. Falls das Teilchen entlang der  $z$ -Achse fliegt und in der  $x$ -Richtung in der  $(x-z)$ -Ebene gestreut wird, finden wir den Streuwinkel als

$$\sin \theta = \frac{p_x}{p'_z}. \quad (34)$$

Weil die Kraft klein ist, ist es auch der Streuwinkel; deswegen

$$\sin \theta \approx \theta \ll 1, \quad p_x \ll p'_z, \quad p'_z \approx mv. \quad (35)$$

Wir können dann  $p_x$  ausrechnen, indem wir die Differentialgleichung

$$\frac{dp_x}{dt} = F_x(x(t), z(t)) \quad (36)$$

über die Zeit integrieren. Wir erhalten

$$p_x = \int_{-\infty}^{\infty} dt F_x(x(t), z(t)). \quad (37)$$

Die Kraft berechnen wir, indem wir das Potential nach  $x$  ableiten

$$F_x = -\frac{\partial U(r)}{\partial x} = -\frac{dU(r)}{dr} \frac{x}{r}. \quad (38)$$

Um diese Kraft in Gl. (37) zu integrieren, brauchen wir  $x(t)$  und  $z(t)$  und diese Funktionen kennen wir nicht genau. Aber, weil die Kraft klein ist, ist die Bahn eine Gerade, mindestens in erster Näherung. D.h.

$$x(t) = \rho, \quad z(t) = vt, \quad r = \sqrt{v^2 t^2 + \rho^2}.$$

Damit erhalten wir

$$\theta = \frac{p_x}{mv} = -\frac{\rho}{mv} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{r} \frac{dU(r)}{dr} \Big|_{r=\sqrt{v^2 t^2 + \rho^2}} \quad (39)$$

Das Integral ist symmetrisch in  $t$ , sodass wir stattdessen von  $t = 0$  bis  $t = \infty$  integrieren und mit einem Faktor 2 multiplizieren. Wir machen dann eine Variablentransformation  $t \rightarrow r = \sqrt{v^2 t^2 + \rho^2}$ , sodass

$$dt = \frac{r dr}{v \sqrt{r^2 - \rho^2}}, \quad (40)$$

und erhalten

$$\theta = -\frac{2\rho}{mv^2} \int_{\rho}^{\infty} \frac{dr}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} \frac{dU(r)}{dr}. \quad (41)$$

Mit dieser Formel können wir die Kleinwinkelstreuung analysieren. Wir nehmen an, dass sich das Potential asymptotisch wie eine Potenz von  $r$  verhält

$$U(r) = \frac{\alpha}{r^n} \quad (42)$$

Die Abhängigkeit des Streuwinkels von  $\rho$  können wir mit Hilfe von Gl. (41) ausrechnen

$$\theta = \frac{2\rho\alpha n}{mv^2} \int_{\rho}^{\infty} \frac{dr}{r^{n+1} \sqrt{r^2 - \rho^2}} \stackrel{r=\rho\xi}{=} \frac{2\alpha n}{mv^2 \rho^n} \int_1^{\infty} \frac{d\xi}{\xi^{n+1} \sqrt{\xi^2 - 1}} \approx \rho^{-n}. \quad (43)$$

D.h.

$$\rho \sim \theta^{-1/n}, \quad (44)$$

sodass der differentielle Wirkungsquerschnitt lautet

$$\frac{d\sigma}{d\theta} \sim \frac{1}{\theta^{1+2/n}}. \quad (45)$$

Der totale Wirkungsquerschnitt ist dann

$$\int_0^{\infty} \frac{d\sigma}{d\theta} d\theta \approx \int_0^{\infty} \frac{d\theta}{\theta^{1+2/n}} = \infty. \quad (46)$$

Das bedeutet, dass in der klassischen Mechanik die totalen Wirkungsquerschnitte für alle Potentiale unendlich sind, außer für solche, die eine endliche Reichweite haben.