Vorlesung 3: Eindimensionale Bewegung

Wir betrachten jetzt die eindimensionale Bewegung eines Teilchen m in einem zeitunabhängigen Potential $U(x)$. Die Lagrangefunktion lautet

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x). \tag{1}$$

Weil die Lagrangefunktion zeitunabhängig ist, ist die Energie erhalten. Die Energie lautet

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x). \tag{2}$$

Wir können die Geschwindigkeit des Teilchens durch Gl. (2) ausdrücken und erhalten

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\,(E - U(x))}. \tag{3}$$

Dann können wir diese Gleichung integrieren

$$t - t_0 = \pm\sqrt{\frac{m}{2}} \int\limits_{x_0}^{x(t)} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{E - U(x)}}. \tag{4}$$

Welches Vorzeichen man wählt, ist von den Randbedingungen abhängig. Generell beschreibt Gl. (4) die Zeitabhängigkeit der Bahn implizit. Die Integrationskonstanten sind so gewählt, dass $x(t_0)$ gleich x_0 ist.

Als Beispiel betrachten wir ein Teilchen mit der Masse m im Gravitationsfeld. Die Lagrangefunktion lautet

$$L = \frac{m\dot{z}^2}{2} - mgz. \tag{5}$$

Zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ befindet sich das Teilchen auf der Höhe $z = h$ in Ruhe. Wir wollen nun herausfinden, was danach passiert. Wir schreiben

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int\limits_{z(t)}^{h} \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{E - mgz}}. \tag{6}$$

Die Energie E können wir mit Hilfe der Randbedingungen berechnen

$$E = mgh. \tag{7}$$

Wir berechnen das Integral und erhalten

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \left(\frac{-2}{\sqrt{mg}}\right) \sqrt{h - z}\,\Big|_{z=z(t)}^{z=h} = \sqrt{\frac{2}{g}}\,\sqrt{h - z(t)}. \tag{8}$$

Es folgt

$$z(t) = h - \frac{gt^2}{2}. \tag{9}$$

Dieses Beispiel zeigt, dass wir, wenn wir das Integral in Gl. (4) berechnen und dann $x(t)$ als Funktion von t ausdrücken können, eine explizite Lösung gefunden haben. Wenn das nicht möglich ist, können wir entweder das eindimensionale Integral numerisch berechnen oder qualitativ analysieren.

Für eine qualitative Analyse zeichnen wir die potentielle Energie $U(x)$ und die Gesamtenergie E in einem Diagramm. Weil die kinetische Energie immer positiv ist, kann sich das Teilchen nur dort bewegen, wo $E > U(x)$ ist. Es gibt dann verschiedene Situationen, abhängig von der Energie. Zum Beispiel, falls $E > U_{\text{max}}$ ist, kann sich das Teilchen überall zwischen $x = \pm\infty$ bewegen, und das Teilchen bewegt sich immer in entweder positive oder negative x-Richtung. Diese Situation sieht man in Abb. 1 für $E = E_1$. Ein anderes Beispiel ist $E = E_2$ in Abb. 1. Hier gibt es verschiedene Möglichkeiten. Entweder kann das Teilchen sich zwischen Punkt C und $x = \infty$ bewegen (oder spiegelsymmetrisch an die linken Seite bis $x = -\infty$) oder zwischen den Punkten A und B pendeln. In diesem letzten Fall nennen wir die Bewegung *endlich*, da x während der gesamten Bewegung nur endliche Werte zwischen x_A und x_B annehmen kann.

Für endliche Bewegungen können wir die Umlaufzeit berechnen als

$$T = \sqrt{2m} \int_{x_A}^{x_B} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{E - U(x)}}. \tag{10}$$

Diese zwei Punkte, x_A und x_B, kann man mit Hilfe der Gleichung

$$E = U(x_{A,B}) \tag{11}$$

finden. Dies sind die *Umkehrpunkte*, an denen die kinetische Energie und dementsprechend die Geschwindigkeit des Teilchens Null ist.

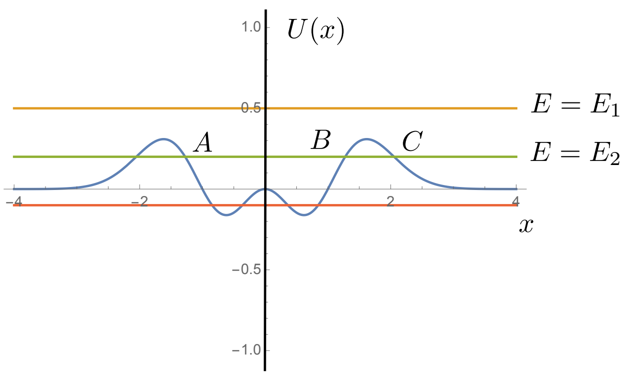

Abbildung 1: Die eindimensionale Bewegung.

Als Beispiel berechnen wir die Umlaufzeit für ein harmonischen Oszillator (z.B. ein Pendel bei kleiner Auslenkung). Die Lagrangefunktion lautet

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{m\omega^2 x^2}{2}. \tag{12}$$

Die Lagrangefunktion ist zeitunabhängig. Deswegen ist wieder die Energie E erhalten. Wir schreiben

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}. \tag{13}$$

Die Umlaufzeit ist dann

$$T(E) = \sqrt{2m} \int\limits_{x_A(E)}^{x_B(E)} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{E - \frac{m\omega^2 x^2}{2}}}. \tag{14}$$

Um die zwei Umkehrpunkte zu finden, lösen wir die Gleichung

$$E = U(x_{A,B}) = \frac{m\omega^2 x_{A,B}^2}{2}, \tag{15}$$

und finden

$$x_{A,B} = \pm\, x_0 = \pm\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}. \tag{16}$$

Dann schreiben wir

$$\begin{aligned} T &= \sqrt{2m} \int\limits_{-x_0}^{x_0} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{E - \frac{m\omega^2 x^2}{2}}} = \sqrt{\frac{2m}{E}} \int\limits_{-x_0}^{x_0} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{x_0^2}}} \qquad (x \to x_0 \xi) \\ &= \sqrt{\frac{2m}{E}}\, x_0 \int\limits_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \qquad (\xi \to \cos\phi) \\ &= \sqrt{\frac{2m x_0^2}{E}} \int\limits_{0}^{\pi} \mathrm{d}\phi = \frac{2\pi}{\omega}. \end{aligned} \tag{17}$$

D.h. wir erhalten für die Umlaufzeit

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \tag{18}$$

die damit E-unabhängig ist, wie wir in der vorigen Vorlesung diskutiert haben.