Vorlesung 2: Erhaltungssätze, Noether-Theorem, Virialsatz und Ähnlichkeitstransformationen

In der Mechanik ist es unser Ziel, die Zustände mechanischer Systeme für gegebene Randbedingungen als Funktion der Zeit beschreiben zu können. Um dieses Ziel zu erreichen, müssen wir die Euler-Lagrange-Gleichungen für alle unabhängigen Koordinaten lösen. Es kann einfacher sein, solche Lösungen zu finden, falls wir wissen, dass bestimmte Kombinationen von Koordinaten und Geschwindigkeiten zeitunabhängig sind

$$I = F(q_1(t), \dot{q}_1(t), \dots, q_N(t), \dot{q}_N(t), t), \qquad \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = 0. \tag{1}$$

Solche Konstanten nennt man *Bewegungsintegrale* oder *Erhaltungsgrößen*.

Um ein Beispiel zu zeigen, betrachten wir ein System, dessen Lagrangefunktion L explizit zeitunabhängig ist, $L = L(q_1, q_2, \dots, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots)$. Wir berechnen L *für die Lösungen der Euler-Lagrange-Gleichugen* und berechnen die *totale* Zeitableitung

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial q_i}\frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\mathrm{d}^2 q_i}{\mathrm{d}t^2} \tag{2}$$

Weil L explizit zeitunabhängig ist, verschwindet die Zeitableitung $\partial L/\partial t = 0$. Und weil $q_i(t)$ die Lösungen der Bewegungsgleichungen sind, haben wir

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \tag{3}$$

Mit Hilfe von Gl. (3), schreiben wir Gl. (2) um

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right]\frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\mathrm{d}^2 q_i}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i. \tag{4}$$

Wenn wir dann eine Funktion E definieren

$$E = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L, \tag{5}$$

bedeutet Gl. (4), dass E eine Erhaltungsgröße ist

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0. \tag{6}$$

Es ist einfach zu sehen, dass für $L = m\dot{\vec{r}}^2/2 - U(\vec{r})$,

$$E = \frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2} + U(\vec{r}) = T + U. \tag{7}$$

Offensichtlich ist die Erhaltungsgröße E die Energie des Systems.

Es ist interessant, die Existenz der Erhaltungsgrößen mit den Eigenschaften der Lagrangefunktion zu verbinden. Diese Verbindung ergibt sich durch das *Noether-Theorem*. Um das Noether-Theorem zu erklären, betrachten wir ein mechanisches System mit N Freiheitsgraden, welches wir mit Hilfe der Lagrangefunktion $L(\{q_i\},\{\dot{q}_i\},t)$ beschreiben. Mit der Lagrangefunktion können wir natürlich die Wirkung berechnen

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \; L(\{q_i\},\{\mathrm{d}q_i/\mathrm{d}t\},t). \tag{8}$$

Wir können die verallgemeinerten Koordinaten und sogar die Zeit anders wählen; d.h. statt q_i und t, können wir q_i' und t' benutzen. Dann gilt

$$q_i = f_i(\{q_i'\},t'), \qquad t = f_t(\{q_i'\},t'). \tag{9}$$

Wir können die Wirkung in den neuen Koordinaten ausdrücken; wir erhalten

$$S = \int_{t_1'}^{t_2'} \mathrm{d}t' \; L'(\{q_i'\},\{\mathrm{d}q_i'/\mathrm{d}t'\},t'). \tag{10}$$

Normalerweise, wenn man andere Koordinaten wählt, unterscheiden sich L' und L und man kann nicht viel mit dem Variablenwechsel anfangen – man hat lediglich andere Variablen gewählt. Es gibt aber Situation wo $L' = L$ ist. Um zu zeigen, wie das passieren könnte, betrachten wir ein paar Funktionen, die nicht viel mit Mechanik zu tun haben.

- Wir betrachten eine Funktion von drei Variablen $U(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$. Wir machen eine Variablentransformation

  $$x = x'\cos\varphi + y'\sin\varphi, \qquad y = -x'\sin\varphi + y'\cos\varphi, \qquad z' = z. \tag{11}$$

  Wir erhalten

  $$U(x,y,z) = x'^2 + y'^2 + z'^2 = U(x',y',z'). \tag{12}$$

- Wir betrachten eine Funktion $U(x,y) = x/y^2$ und machen die Variablentransformation

  $$x = \lambda x', \qquad y = \sqrt{\lambda}y'. \tag{13}$$

  Wir erhalten

  $$U(x,y) = \frac{x'}{y'^2} = U(x',y'). \tag{14}$$

Es ist offensichtlich, dass nicht alle Variablentransformationen die Funktionen invariant lassen. Falls wir z.B. im zweiten Beispiel eine andere Transformation machen

$$x = x'^2, \qquad\qquad y = y', \tag{15}$$

dann ändert sich die Funktion

$$U(x,y) = \frac{x'^2}{y'^2} \neq U(x',y'). \tag{16}$$

Nun gehen wir zurück zu Gl. (9,10) und betrachten die *infinitesimalen* Transformationen, welche die Wirkung invariant lassen. Das bedeutet folgendes: Eine Variablentransformation ist normalerweise von einem Parameter abhängig. In unseren Beispielen sind diese Parameter φ und λ. Eine infinitesimale Transformation ist eine Transformation, die "beinahe die Identitätstransformation" ist.

Als Beispiel betrachten wir in Gl. (11) den Parameter φ als sehr klein und schreiben die Transformation somit als

$$x = x' + \varphi y' + \mathcal{O}(\varphi^2), \qquad\qquad y = y' - \varphi x' + \mathcal{O}(\varphi^2). \tag{17}$$

Wenn wir dann bis zur *ersten Ordnung in* φ arbeiten, bleibt U unter dieser Transformation invariant

$$U(x,y,z) = U(x',y',z') + \mathcal{O}(\varphi^2). \tag{18}$$

Wir schreiben dann die infinitesimale Version der Transformation Gl. (9) als

$$q_i' = q_i + \epsilon\Psi_i(\{q_j\},t), \qquad\qquad t' = t + \epsilon X(\{q_j\},t). \tag{19}$$

Die Größe $\epsilon \ll 1$ parametrisiert die Transformation; für $\epsilon = 0$ erhalten wir die Identitätstransformation.

Wir wählen die Transformation so, dass die Wirkung invariant bleibt

$$S = \int\limits_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\; L(\{q\},\{\mathrm{d}q/\mathrm{d}t\},t) = \int\limits_{t_1'}^{t_2'} \mathrm{d}t'\; L(\{q'\},\{\mathrm{d}q'/\mathrm{d}t'\},t') + \mathcal{O}(\epsilon^2). \tag{20}$$

Wir wollen jetzt zeigen, dass die Zeitunabhängigkeit der Größe

$$I = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\left[\Psi_i - X\dot{q}_i\right] + LX \tag{21}$$

aus der Invarianz der Wirkung, Gl. (20), folgt.

Die Idee ist einfach: Wir drücken $S' = \int \mathrm{d}t' L(q', \mathrm{d}q'/\mathrm{d}t', t')$ durch q und t aus und nutzen dann die Gleichheit von S' und S. Wir beginnen zunächst mit der Berechnung verschiedener Bausteine

$$\mathrm{d}t' = \mathrm{d}t\,\left(1 + \epsilon\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}\right), \quad \frac{\mathrm{d}q_i'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}(q_i + \epsilon\Psi_i)}{\mathrm{d}t\,\left(1 + \epsilon\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}\right)} = \dot{q}_i + \epsilon\left[\frac{\mathrm{d}\Psi_i}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}\dot{q}_i\right] + \mathcal{O}(\epsilon^2). \tag{22}$$

Wir benutzen diese Ausdrücke, um die Lagrangefunktion zu entwickeln und erhalten

$$L(\{q'\},\{\mathrm{d}q'/\mathrm{d}t'\},t') \approx L(\{q\},\{\dot{q}\},t)+\epsilon X\frac{\partial L}{\partial t}+\epsilon\sum_i\left[\frac{\partial L}{\partial q_i}\Psi_i+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\left[\frac{\mathrm{d}\Psi_i}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}\dot{q}_i\right]\right]+\mathcal{O}(\epsilon^2). \tag{23}$$

Wir setzen dieses Ergebnis in den Ausdruck für die Wirkung ein und erhalten (wir vernachlässigen alle $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ Beiträge)

$$\begin{aligned}
S' &= \int_{t_1'}^{t_2'}\mathrm{d}t'\;L(\{q'\},\{\mathrm{d}q'/\mathrm{d}t'\},t') = \int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\;\left(1+\epsilon\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}\right)L(\{q'\},\{\mathrm{d}q'/\mathrm{d}t'\},t')\\
&= \int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\left\{L(\{q\},\{\dot{q}\},t)+\epsilon\left(\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}L+\frac{\partial L}{\partial t}X+\sum_i\left[\frac{\partial L}{\partial q_i}\Psi_i+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{\mathrm{d}\Psi_i}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}\dot{q}_i\right)\right]\right)\right\}\\
&= S+\epsilon\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\left\{\frac{\mathrm{d}\,(XL)}{\mathrm{d}t}-X\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial L}{\partial t}X+\sum_i\left[\frac{\partial L}{\partial q_i}\Psi_i+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{\mathrm{d}\Psi_i}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}\dot{q}_i\right)\right]\right\}.
\end{aligned} \tag{24}$$

Wir können die letzte Gleichung vereinfachen, indem wir die totale Zeitableitung explizit ausdrücken

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial L}{\partial t}+\sum_i\frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i. \tag{25}$$

Wir schreiben dann

$$0=S'-S=\epsilon\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\left[\frac{\mathrm{d}\,(XL)}{\mathrm{d}t}+\sum_i\frac{\partial L}{\partial q_i}\Psi+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\mathrm{d}\Psi_i}{\mathrm{d}t}-X\frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i-X\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}\right]. \tag{26}$$

Bis zum diesen Punkt haben wir keine Annahmen über die Zeitabhängigkeit von $q_i(t)$ gemacht; jetzt werden wir $q_i(t)$ als die wahre Lösung der Euler-Lagrange-Gleichungen betrachten. Dann gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}=\frac{\partial L}{\partial q_i}, \tag{27}$$

sodass

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial L}{\partial q_i}\Psi_i+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\mathrm{d}\Psi_i}{\mathrm{d}t}=\Psi_i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\mathrm{d}\Psi_i}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\Psi_i\right)\\
&X\frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i+X\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\dot{q}_iX+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_iX+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_iX\right].
\end{aligned} \tag{28}$$

Wir können jetzt Gl. (26) umschreiben

$$0=\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t}, \tag{29}$$

wobei
$$I(t) = LX + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} (\Psi_i - X\dot{q}_i) \tag{30}$$
ist. Es folgt aus Gl. (29), dass
$$0 = I(t_1) - I(t_2), \tag{31}$$
sodass $I(t)$ zeitunabhängig ist. Dies ist die Aussage des Noether-Theorems.

Als nächsten Schritt werden wir verschiedene Beispiele diskutieren.

1. Wir kehren zu unserem Beispiel zurück, in dem die Lagrangefunktion explizit unabhängig von der Zeit ist, d.h. $L = L(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\})$. Diese Lagrangefunktion ist invariant unter der Transformation
$$q'_i = q_i, \qquad\qquad t' = t + \tau. \tag{32}$$
wobei τ beliebig ist. In der Tat gilt $\mathrm{d}t' = \mathrm{d}t$, sodass $\dot{q}_i = \mathrm{d}q_i/\mathrm{d}t = \mathrm{d}q_i/\mathrm{d}t' = \mathrm{d}q'_i/\mathrm{d}t'$. Das bedeutet, dass
$$L = L(\{q_i\}, \dot{q}_i) = L(\{q'_i\}, \mathrm{d}q'_i/\mathrm{d}t'), \tag{33}$$
und wir können somit das Noether-Theorem anwenden.

   Die Transformation in Gl. (32) ist exakt. Wir müssen die infinitesimale Version dieser Transformation an Gl. (19) anpassen. Es ist offensichtlich, dass $\Psi_i = 0$ ist und, falls wir τ in Gl. (32) als klein betrachten und mit ϵ identifizieren, dann finden wir dass $X = 1$ ist. Die Erhaltungsgröße ist dann die Energie
$$I = L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = -E, \tag{34}$$
wie aus Gl. (5) folgt.

2. Als zweites Beispiel betrachten wir die Situation in der die Lagrangefunktion von einer Koordinate unabhängig ist. Bezeichnen wir diese Koordinate mit q_1, sodass
$$L = L(q_2, q_3, ...q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, ...\dot{q}_N, t), \tag{35}$$
bleibt die Lagrangefunktion invariant unter der Transformation
$$q_1 = q'_1 + \epsilon, \qquad q_{i\neq 1} = q'_i, \qquad t' = t. \tag{36}$$
Das bedeutet
$$\Psi_1 = 1, \qquad \Psi_{i\neq 1} = 0, \qquad X = 0. \tag{37}$$
Wir finden dann die Erhaltungsgröße
$$I = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}, \tag{38}$$
sodass in diesem Fall der kanonische Impuls $p_1 = \partial L/\partial q_1$ zeitunabhängig ist. Man bezeichnet eine solche verallgemeinerte Koordinate, von der die Lagrangefunktion unabhängig ist, auch als *zyklische* Koordinate.

3. Als Nächstes betrachten wir geschlossene mechanische Systeme. Die Lagrangefunktion lautet
$$L = \sum_{\alpha}^{N} \frac{m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha^2}{2} - \sum_{\alpha,\beta} U(\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta). \tag{39}$$
Diese Lagrangefunktion beschreibt N Teilchen, die miteinander wechselwirken, und bleibt invariant, wenn wir *alle* Ortsvektoren um einen konstanten Vektor $\vec{\epsilon}$ verschieben
$$\vec{r}_\alpha = \vec{r}'_\alpha + \vec{\epsilon}. \tag{40}$$
Beachten Sie, dass wir diese Transformation mit einem Vektor $\vec{\epsilon}$ parametrisiert haben; d.h. Gl. (40) beschreibt *drei* unterschiedliche Transformation (d.h. einmal verschieben wir die x-Koordinaten aller Teilchen, einmal die y-Koordinaten usw.). Dementsprechend ist auch Ψ ein Einheitsvektor
$$\vec{\Psi}_\alpha = \vec{1}, \tag{41}$$
sodass die Erhaltungsgrößen lauten
$$\vec{I} = \sum_{\alpha}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_\alpha} = \sum_{\alpha}^{N} m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha. \tag{42}$$
Diese Erhaltungsgröße ist der Gesamtimpuls des Systems $\vec{P}_{\mathrm{tot}}$. Die Folge dieses Ergebnis ist, dass sich der Schwerpunkt des geschlossenen Systems $\vec{R}$ mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{V}$ bewegt. In der Tat gilt
$$\vec{R} = \frac{\sum m_\alpha \vec{r}_\alpha}{\sum m_\alpha} \qquad \Rightarrow \vec{V} = \frac{\mathrm{d}\vec{R}}{\mathrm{d}t} = \frac{\sum m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha}{\sum m_\alpha} = \frac{\vec{P}_{\mathrm{tot}}}{M_{\mathrm{tot}}} = \mathrm{const}. \tag{43}$$

4. Als letztes Beispiel betrachten wir die Lagrangefunktion, welche die Bewegung eines Teilchens im Zentralfeld beschreibt
$$L = \frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2} - U(|\vec{r}|). \tag{44}$$
Diese Lagrangefunktion ist invariant unter Drehungen. Die Variablentransformation, welche infinitesimale Drehungen um die Achse $\vec{n}$ um den kleinen Winkel ϵ beschreibt, lautet
$$\vec{r}' = \vec{r} + \epsilon[\vec{n} \times \vec{r}]. \tag{45}$$
Wir können überprüfen, dass $\vec{r}^2$ invariant bleibt
$$\vec{r}'^2 = \vec{r}^2 + 2\epsilon[\vec{n} \times \vec{r}] \cdot \vec{r} + \mathcal{O}(\epsilon^2) = \vec{r}^2 + \mathcal{O}(\epsilon^2). \tag{46}$$
Die Transformation der Geschwindigkeit lautet
$$\dot{\vec{r}}' = \dot{\vec{r}} + \epsilon[\vec{n} \times \dot{\vec{r}}], \tag{47}$$

sodass

$$\dot{\vec{r}}'^2 = \dot{\vec{r}}^2 + \mathcal{O}(\epsilon^2). \tag{48}$$

Wir schreiben $[\vec{n} \times \vec{r}]_i = \epsilon_{ijk} n_j r_k$ und finden Ψ_i

$$\Psi_i = \epsilon_{ijk} n_j r_k. \tag{49}$$

Wir erhalten für die Erhaltungsgröße

$$I = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} \Psi_i = \vec{n} \cdot [\vec{r} \times \vec{p}], \tag{50}$$

wobei $\vec{p} = m\dot{\vec{r}}$ der Impuls ist. Weil die Drehachse $\vec{n}$ beliebig ist, können wir Gl. (50) als die Erhaltung eines *Vektors* interpretieren. Dieser Vektor

$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{p}] \tag{51}$$

ist gerade der Drehimpuls des Teilchens, das von unserer Lagrangefunktion Gl. (44) beschrieben wird.

Es gibt eine Reihe von Transformationen, unter denen die Wirkung sich ändert, aber auf bekannte Weise. In dem Fall geht es nicht um Erhaltungsgrößen, aber man kann nützliche Informationen über mechanische Systeme gewinnen. Ein Beispiel ist das sogenannte *Virialtheorem*. Es geht dabei um Folgendes: Wir betrachten die Bewegung eines Teilchens in einem Potential, das eine homogene Funktion ist

$$U(\lambda \vec{r}) = \lambda^n U(\vec{r}). \tag{52}$$

Um zum Noether-Theorem zu kommen, betrachten wir folgende Transformationen

$$\vec{r}' = \lambda \vec{r}, \quad t' = \beta t. \tag{53}$$

Die Lagrangefunktion transformiert sich folgendermaßen

$$L' = \frac{m}{2} \left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}'}{\mathrm{d}t'} \right)^2 - U(\vec{r}') = \frac{\lambda^2}{\beta^2} \frac{m}{2} \left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \right)^2 - \lambda^n U(\vec{r}). \tag{54}$$

Wenn wir β als $\beta = \lambda^{1-n/2}$ wählen, erhalten wir

$$L' = \lambda^n L. \tag{55}$$

Wir benutzen diese Gleichung und finden das Transformationsverhalten der Wirkung

$$S' = \lambda^{1+n/2} S. \tag{56}$$

Jetzt können wir die infinitesimale Transformation $\lambda = 1 + \epsilon$ betrachten und die obige Gleichung benutzen, um einen Zusammenhang zwischen verschiedenen Beiträgen zu finden. Im Vergleich zum Noether-Theorem, bekommen wir einen zusätzlichen Term

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left(\left(1 + \frac{n}{2} \right) L + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[EX - m\dot{\vec{r}}_i \Psi_i \right] \right) \tag{57}$$

Jetzt ist $\Psi_i = r_i$ und $X = (1 - n/2)t$, sodass

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left(\left(1 + \frac{n}{2}\right) L + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[E(1 - n/2)t - m\dot{\vec{r}}_i \vec{r}_i \right] \right). \tag{58}$$

Um diese Größe zu interpretieren, ist es nützlich das Konzept des durchschnittlichen Werts einer Funktion zu nutzen.

$$\langle f(t) \rangle = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mathrm{d}t f(t). \tag{59}$$

Dieser Mittelwert gibt uns eine grobe Idee über die Funktion $f(t)$. Gl. (58) erlaubt uns, die Verhältnisse zwischen den Mittelwerten verschiedener Größen zu finden

$$0 = \left(1 + \frac{n}{2}\right) \langle L \rangle + \left(1 - \frac{n}{2}\right) \langle E \rangle - \left\langle \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} m\dot{\vec{r}} \cdot \vec{r} \right\rangle. \tag{60}$$

Stellen wir uns vor, dass die Bewegung unseres Systems im endliche Raum mit endlicher Geschwindigkeit stattfindet. Dann

$$\left\langle \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} m\dot{\vec{r}} \cdot \vec{r} \right\rangle = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} m\dot{\vec{r}} \cdot \vec{r} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \left(m\dot{\vec{r}}(T) \cdot \vec{r}(T) - m\dot{\vec{r}}(0) \cdot \vec{r}(0) \right) = 0. \tag{61}$$

Dieses Ergebnis erlaubt uns, den dritten Term in Gl. (60) vernachlässigen. Falls wir dann $\langle E \rangle$ als $\langle T + U \rangle$ schreiben, bekommen wir das Verhältnis zwischen den Mittelwerten von potentieller und kinetischer Energie

$$\langle T \rangle = \frac{n}{2} \langle U \rangle. \tag{62}$$

Diese Gleichung ist das Virialtheorem.

Wir können auch andere interessante Erkenntnisse über die Bewegungseigenschaften mechanischer Systeme mit homogener potentieller Energie gewinnen. Wir betrachten ein mechanisches System mit potentieller Energie $U(\vec{r})$, die homogen ist

$$U(\lambda \vec{r}) = \lambda^n U(\vec{r}). \tag{63}$$

Wie wir schon wissen, erhalten wir, falls wir die Variablentransformationen $\vec{r}' = \lambda \vec{r}$ und $t' = \beta t$, mit $\beta = \lambda^{1-n/2}$ durchführen,

$$L(\vec{r}', \dot{\vec{r}}') = \lambda^n L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}). \tag{64}$$

Falls zwei Lagrangefunktionen proportional zueinander sind, sind die zugehörigen Bewegungsgleichungen identisch.

Das bedeutet, dass falls $\vec{r}'(t')$ eine Lösung der Euler-Lagrange-Gleichungen und $\vec{r}(t)$ eine andere Lösung ist, muss

$$\vec{r}'(t') = \vec{r}'(\beta t) = \lambda \vec{r}(t) \tag{65}$$

gelten.

Wir können das direkt überprüfen.

$$\begin{aligned} m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}'(t')}{\mathrm{d}t'^2} &= \frac{m}{\beta^2}\frac{\vec{r}'(\beta t)}{\mathrm{d}t^2} = \frac{m\lambda}{\beta^2}\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\lambda}{\beta^2}\frac{\partial U(\vec{r})}{\partial \vec{r}} = \frac{\lambda}{\beta^2}\frac{\lambda}{\lambda^n}\frac{\partial \lambda^n U(\vec{r})}{\partial \lambda \vec{r}} \\ &= \frac{\lambda}{\beta^2}\frac{\lambda}{\lambda^n}\frac{\partial U(\lambda\vec{r})}{\partial \lambda \vec{r}} = \frac{\lambda^2 - n}{\beta^2}\frac{\partial U(\vec{r}')}{\partial \vec{r}'} = \frac{\partial U(\vec{r}')}{\partial \vec{r}'}, \end{aligned} \tag{66}$$

weil $\beta = \lambda^{1-n/2}$ ist.

Es folgt dann, dass wir, wenn wir eine Lösung $\vec{r}(t)$ haben, aus dieser Lösung eine weitere Lösung $\lambda^{-1}\vec{r}(\beta t)$ konstruieren können. Wir können diese Ähnlichkeitsbedingungen etwas anders verwenden. Stellen wir uns vor, dass wir zwei Bahnen mit den Abmessungen $L_{1,2}$ und die Umlaufzeiten $T_{1,2}$ betrachten. Es folgt aus der vorigen Diskussion, dass falls sich die Abmessungen um einen Faktor λ unterscheiden, müssen sich die Umlaufzeiten um einen Faktor β unterscheiden. Dann

$$\frac{L_1}{L_2} = \lambda, \qquad\qquad \frac{T_1}{T_2} = \beta = \lambda^{1-n/2}. \tag{67}$$

Weil λ und β abhängig sind, bedeutet das, dass es ein Verhältnis zwischen den Abmessungen und den Umlaufzeiten gibt

$$\left(\frac{L_1}{L_2}\right)^{1-n/2} = \frac{T_1}{T_2}. \tag{68}$$

Als Beispiel, können wir ein Pendel betrachten. In diesem Fall ist die potentielle Energie $U = k\vec{r}^2/2$, sodass $n = 2$ ist. Hier ist die Abmessung die Amplitude der Schwingungen. Es folgt aus Gl. (68), dass

$$\frac{T_2}{T_1} = 1, \tag{69}$$

und das heißt, dass für ein Pendel die Umlaufzeit unabhängig von der Amplitude der Schwingungen ist.

Ein anderes Beispiel ist das dritte Keplersche Gesetz, das die Größe der Orbits von Planeten R und deren Umlaufzeiten miteinander verbindet. Dabei ist die potentielle Energie $U(r) = GmM/r$, sodass $n = -1$ ist. Es folgt

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{3/2}. \tag{70}$$