Vorlesung 1: Das Prinzip der kleinsten Wirkung

Wir fangen mit einer Bemerkung an: Das Ziel der Mechanik ist es, die Bewegung eines Körpers in externen Kraftfeldern zu beschreiben. Ein typisches Beispiel ist die Bewegung der Erde um die Sonne. Der Körper behält seine Form und bewegt sich als Ganzes. Einer der Grundbegriffe der Mechanik ist der Begriff des *Massenpunktes* oder des *Teilchens*. Diese Begriffe beschreiben einen Körper dessen Ausmaße bei der Beschreibung seiner Bewegung vernachlässigt werden können. Wann das möglich ist und wann nicht, ist von der Situation abhängig: Falls wir die Bewegung der Erde um die Sonne beschreiben wollen, ist die Erde ein Massenpunkt; falls wir hingegen die Bewegung eines Flugzeugs um die Erde beschreiben wollen, ist die Erde kein Massenpunkt mehr.

Wir können den Zustand eines Teilchens vollständig beschreiben indem wir drei Koordinaten des Teilchens x, y, z oder einen Ortsvektor $\vec{r}$ angeben. Falls das Teilchen sich bewegt, sind die Koordinaten des Teilchens zeitabhängig. Unser Ziel ist es, diese Abhängigkeit zu bestimmen und die Funktion $\vec{r}(t)$ zu finden.

Die Zeitabhängigkeit von $\vec{r}(t)$ folgt aus dem zweiten Newtonschen Gesetz

$$m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}^2 t} = \vec{F}, \tag{1}$$

wobei m die Masse des Teilchens und $\vec{F}$ die Kraft sind. Wenn wir diese Gleichung lösen, finden wir die zeitabhängige Bahn des Teilchens.

Mathematisch ist das zweite Newtonsche Gesetz eine Differentialgleichung zweiter Ordnung. D.h., dass für eine vollständige Lösung (also um die Bahn des Teilchens vollständig beschreiben zu können) brauchen wir *zwei* Randbedingungen. Diese zwei Randbedingungen können wir beliebig wählen – z.B. wir können fordern, dass zum Zeitpunkt $t = t_0$ das Teilchen einen bestimmten Ortsvektor und eine bestimmte Geschwindigkeit hat

$$\vec{r}(t = t_0) = \vec{r}_0, \quad \frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t}|_{t=t_0} = \dot{\vec{r}}|_{t=t_0} = \vec{v}_0. \tag{2}$$

Andererseits können wir z.B. verlangen, dass das Teilchen zu den Zeitpunkten $t = t_{0,1}$ zwei bestimmten Ortsvektoren hat

$$\vec{r}(t = t_0) = r_1, \quad \vec{r}(t = t_1) = r_2, . \tag{3}$$

Es gibt auch verschiedene Kombinationen von Randbedingungen, die wir benutzen können.

Das zweite Newtonsche Gesetz ist im Prinzip alles, was man braucht, um die Bahn des Teilchens zu bestimmen. Wir können jetzt das zweite Newtonsche Gesetz einfach als Postulat annehmen oder wir können ein anderes Prinzip identifizieren, dessen Folge das zweite Newtonsche Gesetz ist. Die zweite Alternative ist nicht nur theoretisch interessant, sondern auch in der Praxis für die Beschreibung mechanischer Systeme sehr hilfreich.

Um dieses Prinzip zu formulieren, stellen wir uns vor, dass für jedes mechanische System eine Funktion existiert, die uns schlussendlich die Bewegungsgleichung für dieses System gibt. Wir nennen diese Funktion die *Lagrangefunktion* L. Die Lagrangefunktion ist von dem Ortsvektor und der Geschwindigkeit des Teilchens und auch von der Zeit abhängig

$$L = L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t). \tag{4}$$

Mit Hilfe dieser Funktion, können wir die sogenannte *Wirkung* S berechnen

$$S[\vec{r}(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \; L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t). \tag{5}$$

Die Wirkung ist eine Funktion von $t_{1,2}$ und von der gesamten Bahn des Teilchens. Eine Funktion S, die eine Funktion (z.B. $\vec{r}(t)$) auf eine Zahl abbildet, heißt *Funktional*. Man sagt, dass die Wirkung ein Funktional der Bahn des Teilchens ist.

Mit Hilfe der Wirkung können wir für jede Bahn jedes mechanischen Systems eine Zahl berechnen. Es muss betont werden, dass es unendlich viele Bahnen gibt, die einen Anfangspunkt und einen Endpunkt verbinden. Es ist auch klar, dass ein mechanisches System in der Natur nur *einer* Bahn folgt. Es stellt sich nun die Frage: Wie wählt ein System die "richtige" Bahn?

Die Antwort zu dieser Frage ist durch das Prinzip der kleinsten Wirkung gegeben. Das Prinzip lautet:

Ein mechanisches System bewegt sich so, dass der Wert der Wirkung S minimal ist.

Wie findet man das Minimum der Wirkung? Wir erinnern uns dazu zunächst an das entsprechende Vorgehen für Funktionen. Um ein Extremum x_0 einer Funktion $f(x)$ zu finden, können wir $f(x)$ mit $f(x + \delta x)$ vergleichen und einen Wert x suchen, wo der Unterschied zwischen den Werten der zwei Funktionen keine linearen Terme in δx hat. D.h. falls

$$f(x + \delta x) - f(x) \approx \mathcal{O}(\delta x^2) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = 0, \tag{6}$$

gilt, ist x ein Extremum.

Wir können genau das Gleiche mit der Wirkung S machen. D.h. wir berechnen S für zwei unterschiedliche Bahnen $\vec{r}_a(t) = \vec{r}(t)$ und $\vec{r}_b(t) = \vec{r}(t) + \delta\vec{r}(t)$ und versuchen so eine Bahn $\vec{r}(t)$ zu finden, für die

$$S[\vec{r}_b(t)] - S[\vec{r}_a(t)] \sim \mathcal{O}(\delta r^2), \tag{7}$$

für beliebige $\delta\vec{r}(t)$ gilt. Es ist dabei wichtig, dass wir, wenn wir die Beiträge von verschiedenen Bahnen vergleichen, immer den Anfangspunkt und den Endpunkt festhalten; d.h.

$$\vec{r}_a(t_1) = \vec{r}_b(t_1) = \vec{r}_i, \quad \vec{r}_a(t_2) = \vec{r}_b(t_2) = \vec{r}_f, \quad \delta\vec{r}(t_1) = \delta\vec{r}(t_2) = 0. \tag{8}$$

Physikalisch bedeutet das, dass wir die Wirkung für bestimmte Randbedingungen minimieren.

Wir zeigen jetzt, wie wir die Differenz der Wirkungen berechnen können. Wir schreiben

$$\delta S = S[\vec{r}_b(t)] - S[\vec{r}_a(t)] = \int\limits_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left[L(\vec{r} + \delta\vec{r}, \dot{\vec{r}} + \delta\dot{\vec{r}}, t) - L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \right] \tag{9}$$

Weil $\delta\vec{r}$ und $\delta\dot{\vec{r}}$ klein sind, können wir die Lagrangefunktion entwickeln. Wir erhalten

$$L(\vec{r} + \delta\vec{r}, \dot{\vec{r}} + \delta\dot{\vec{r}}, t) \approx L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial L}{\partial r_i} \delta r_i + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} \delta \dot{r}_i\ . \tag{10}$$

Dann

$$\delta S = \sum_{i=1}^{3} \int\limits_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left[\frac{\partial L}{\partial r_i} \delta r_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} \delta \dot{r}_i \right] \tag{11}$$

Wir können den letzten Term umschreiben, sodass wir $\delta\vec{r}$ statt $\delta\dot{\vec{r}}$ bekommen. Wir integrieren partiell und erhalten

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} \delta \dot{r}_i = \int\limits_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} \frac{\mathrm{d}\delta r_i}{\mathrm{d}t} = \int\limits_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left\{ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} \delta r_i \right] - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} \right] \delta r_i \right\}. \tag{12}$$

Den ersten Term können wir vereinfachen

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} \delta r_i \right] = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} \delta r_i \Big|_{t_1}^{t_2} = 0, \tag{13}$$

weil $\delta\vec{r}(t_{1,2}) = 0$ ist. Wir bekommen dann für δS

$$\delta S = \sum_{i=1}^{3} \int\limits_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left\{ \frac{\partial L}{\partial r_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} \right] \right\} \delta r_i. \tag{14}$$

Falls $\vec{r}(t)$ ein Minimum ist, muss $\delta S \sim \mathcal{O}(\delta\vec{r}^2)$ sein, für alle möglichen $\delta\vec{r}$. Das kann nur passieren, falls $\vec{r}(t)$ die folgende Gleichung erfüllt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i}, \tag{15}$$

sodass der Integrand in Gl. (14) punktweise verschwindet. Die Gleichung (15) nennt man die *Euler-Lagrange-Gleichung*.

Falls die Euler-Lagrange-Gleichung (15) tatsächlich die Bahn eines mechanisches Systems beschreibt, soll sie äquivalent zum zweiten Newtonschen Gesetz sein. Um diese Äquivalenz zu erreichen, müssen wir die Lagrangefunktion L als die Differenz zwischen der kinetischen Energie des Teilchens T und dessen potenzieller Energie U ausdrücken

$$L = T - U(\vec{r}), \tag{16}$$

wobei

$$T = \frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2}. \tag{17}$$

Als nächsten Schritt leiten wir die Euler-Lagrange-Gleichungen für die Lagrangefunktion in Gl. (16) her. Wir erhalten

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = m\dot{\vec{r}}, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = m\ddot{\vec{r}}, \qquad \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}}, \tag{18}$$

sodass die Euler-Lagrange-Gleichung lautet

$$m\ddot{\vec{r}} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}}. \tag{19}$$

Das ist in der Tat das zweite Newtonsche Gesetz, wie angekündigt.

Obwohl die Euler-Lagrange-Gleichungen und die Newtonschen Gleichungen äquivalent sind, bietet der Lagrangeformalismus viele Vorteile. In der Tat

1. kann man fast "mechanisch" (d.h. ohne viel darüber nachzudenken) die Bewegungsgleichungen herleiten; unter anderem bekommt man alle Kräfte automatisch;

2. man kann beliebige Koordinaten wählen, um die Position eines Teilchens zu beschreiben; das ist sehr nützlich, falls die Bewegung durch Zwangsbedingungen eingeschränkt ist;

3. man kann allgemeine Bewegungscharakteristiken des Systems (z.B. sogenannte Bewegungsintegrale – die Größen, die während der Bewegung konstant bleiben) viel einfacher erkennen.

Wir werden jetzt ein Beispiel betrachten, das die Stärken des Lagrangeformalismus sehr deutlich macht. Als ersten Schritt erweitern wir die Lagrangefunktion für den Fall, dass das mechanische System mehrere Teilchen erhält. Wenn die Zahl der Teilchen N ist, lautet die Lagrangefunktion

$$L = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{m\dot{\vec{r}}_\alpha^{\,2}}{2} - U(\vec{r}_1, ..., \vec{r}_N). \tag{20}$$

Bitte beachten Sie, dass wir jetzt mit $\vec{r}_\alpha$ den Ortsvektor des Teilchens α bezeichnen. Die drei Komponenten dieses Ortsvektors bezeichnen wir als $\vec{r}_{\alpha,i}$, $i = 1, 2, 3$ oder $x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha$.

Als Beispiel betrachten wir das Doppelpendel, d.h. zwei unterschiedliche Teilchen, die durch masselose Stangen verbunden sind und sich im Gravitationsfeld befinden (siehe Abb. 1). Wir wollen die Bewegungsgleichungen des Systems herleiten. Wir fangen mit der Lagrangefunktion an, die wir mit Hilfe der *kartesischen Koordinaten* schreiben. Wir erhalten

$$L = \frac{m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2)}{2} + \frac{m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)}{2} - U(y_1, y_2), \tag{21}$$

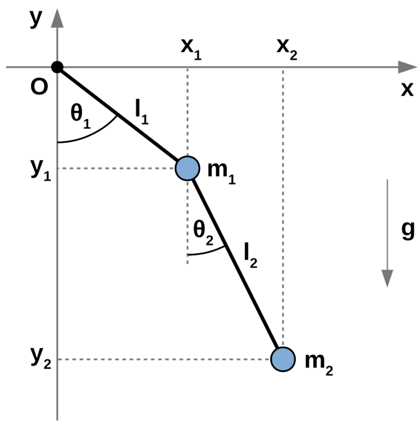

Abbildung 1: Doppelpendel im Gravitationsfeld.

wobei die potentielle Energie U lautet

$$U(y_1, y_2) = m_1 g y_1 + m_2 g y_2. \tag{22}$$

Obwohl es einfach ist, die Lagrangefunktion in kartesischen Koordinaten zu schreiben, ist diese Form der Lagrangefunktion nicht sehr nützlich, weil die Koordinaten *nicht voneinander unabhängig* sind. Tatsächlich erhalten wir, wenn wir die Länge der Stangen $l_{1,2}$ und die Winkel zwischen der y-Achse und den Stangen $\theta_{1,2}$ einführen, folgende Gleichungen

$$\begin{aligned} x_1 &= l_1 \sin\theta_1, & x_2 &= x_1 + l_2 \sin\theta_2, \\ y_1 &= -l_1 \cos\theta_1, & y_2 &= y_1 - l_2 \cos\theta_2. \end{aligned} \tag{23}$$

Wir sehen, dass von vier Variablen nur zwei unabhängig sind. Wenn wir Euler-Lagrange-Gleichungen herleiten, müssen wir nur nach unabhängigen Variablen variieren. Das bedeutet, dass wir als ersten Schritt die Lagrangefunktion Gl. (21) durch die Variablen $\theta_{1,2}$ ausdrücken müssen. Das können wir machen, indem wir Gl. (23) nach der Zeit ableiten

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= l_1 \cos\theta_1\, \dot{\theta}_1, & \dot{x}_2 &= \dot{x}_1 + l_2 \cos\theta_2\, \dot{\theta}_2, \\ \dot{y}_1 &= l_1 \sin\theta_1\, \dot{\theta}_1, & \dot{y}_2 &= \dot{y}_1 + l_2 \sin\theta_2\, \dot{\theta}_2, \end{aligned} \tag{24}$$

und die Ergebnisse in die Lagrangefunktion einsetzen. Wir erhalten

$$\begin{aligned} L = {} & \frac{(m_1+m_2) l_1^2 \dot{\theta}_1^2}{2} + \frac{m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2}{2} + m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\ & + (m_1+m_2) g l_1 \cos\theta_1 + m_2 g l_2 \cos\theta_2. \end{aligned} \tag{25}$$

Weil $\theta_{1,2}$ zwei unabhängige Variablen sind, können wir dann die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} = \frac{\partial L}{\partial \theta_i}, \quad i = 1, 2, \tag{26}$$

sofort benutzen. Wir erhalten dann

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} &= (m_1+m_2)\, l_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1-\theta_2)\dot{\theta}_2, \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} &= (m_1+m_2)\, l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \Big(\cos(\theta_1-\theta_2)\ddot{\theta}_2 - \sin(\theta_1-\theta_2)(\dot{\theta}_1-\dot{\theta}_2)\dot{\theta}_2\Big), \\
\frac{\partial L}{\partial \theta_1} &= -m_2 l_1 l_2 \sin(\theta_1-\theta_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 - (m_1+m_2) g l_1 \sin\theta_1.
\end{aligned} \tag{27}$$

Die gleiche Herleitung kann man für den zweiten Winkel θ_2 machen.

Wir bekommen dann folgende Bewegungsgleichungen für das Doppelpendel

$$\begin{aligned}
&(m_1+m_2)\, l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \Big(\cos(\theta_1-\theta_2)\ddot{\theta}_2 - \sin(\theta_1-\theta_2)(\dot{\theta}_1-\dot{\theta}_2)\dot{\theta}_2\Big) \\
&= -m_2 l_1 l_2 \sin(\theta_1-\theta_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 - (m_1+m_2) g l_1 \sin\theta_1.
\end{aligned} \tag{28}$$

und

$$\begin{aligned}
&m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \Big(\cos(\theta_1-\theta_2)\ddot{\theta}_1 - \sin(\theta_1-\theta_2)(\dot{\theta}_1-\dot{\theta}_2)\dot{\theta}_1\Big) \\
&= m_2 l_1 l_2 \sin(\theta_1-\theta_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 - m_2 g l_2 \sin\theta_2.
\end{aligned} \tag{29}$$

Wir haben in diesem Beispiel gesehen, dass, falls es Zwangsbedingungen gibt, die Zahl unabhängiger Koordinaten kleiner ist als die Zahl kartesischer Koordinaten. Ganz allgemein werden wir, statt über kartesische Koordinaten zu reden, die unabhängigen Größen, die ein mechanisches System vollständig beschreiben, *verallgemeinerte Koordinaten* nennen und sie mit mit $q_1, q_2, q_3, ..., q_N$ bezeichnen. Solche Koordinaten bezeichnen wir als Freiheitsgrade. Die Zahl der Freiheitsgrade ist durch Zwangsbedingungen beschränkt. Oft können wir die Zwangsbedingungen als eine Gleichung ausdrücken

$$f(q_1, q_2, ..., q_N) = 0. \tag{30}$$

Zum Beispiel müssen die Koordinaten eines Teilchens, das sich auf der Oberfläche einer Kugel mit Radius R bewegt, die folgende Gleichung erfüllen

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0. \tag{31}$$

Es gibt zwei Möglichkeiten, mit diesen Zwangsbedingungen umzugehen: Entweder eliminieren wir die abhängigen Koordinaten aus der Lagrangefunktion (wie wir dies für das Doppelpendel gemacht haben) oder wir benutzen sogenannte Lagrangemultiplikatoren und ändern die Lagrangefunktion

$$L \to L' = L + \lambda f(q_1, ..., q_N, t). \tag{32}$$

Der Parameter λ heißt der Lagrangemultiplikator und muss wie eine neue Koordinate behandelt werden.

Die Idee hinter der Erweiterung der Lagrangefunktion wie in Gl. (32) ist Folgende: Stellen wir uns vor, dass die Funktion $f(q_1, ..., q_N)$ eine Oberfläche im N-dimensionalen

Raum beschreibt, auf der sich das Teilchen bewegen kann. Weil das Teilchen sich unter Zwang bewegt, gibt es eine Zwangskraft, die senkrecht zur Oberfläche steht. Die Richtung der Zwangskraft finden wir, indem wir die totale Ableitung der Funktion f berechnen und zu Null setzen

$$\mathrm{d}f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i} \mathrm{d}q_i = 0. \tag{33}$$

Der Vektor $\mathrm{d}\vec{q} = (\mathrm{d}q_1, \mathrm{d}q_2, ..., \mathrm{d}q_N)$ beschreibt die Bewegung auf der Oberfläche und der Vektor $\vec{\partial} f = (\partial_1 f, \partial_2 f, ..., \partial_N f)$ steht, Gl. (33) zufolge, orthogonal zu $\mathrm{d}\vec{q}$. Das bedeutet, dass die Zwangskraft $\vec{N}$ proportional zu $\vec{\partial} f$ ist,

$$\vec{N} = \lambda \vec{\partial} f. \tag{34}$$

Diese Kraft muss auf der rechten Seite der Euler-Lagrange-Gleichungen auftreten, zusammen mit den externen Kräften. Genau das erreichen wir mit der Modifizierung der Lagrangefunktion wie in Gl. (32). Falls wir den Parameter λ als die neue Koordinate betrachten, dann bekommen wir auch die Zwangsbedingung $f = 0$ automatisch.

Wir gehen zurück zur Gl. (32) und berechnen die neuen Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L'}{\partial q_i}, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L'}{\partial \dot{\lambda}} = \frac{\partial L'}{\partial \lambda}. \tag{35}$$

Weil die Lagrangefunktion L' von $\dot{\lambda}$ unabhängig ist, erhalten wir aus der letzten Gleichung die Zwangsbedingung,

$$f(q_1, q_2, ..., q_N, t) = 0. \tag{36}$$

Aus den Gleichungen für q_i erhalten wir

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} + \lambda \frac{\partial f}{\partial q_i}. \tag{37}$$

Wir müssen jetzt die Gln. (36,37) lösen und alle q_i und λ bestimmen. Dadurch finden wir die Lösungen der Bewegungsgleichungen.

Wir betrachten jetzt ein Beispiel bei dem wir verschiedene Methoden benutzen werden, um die Bewegung eines Teilchens zu beschreiben. Das Teilchen befindet sich an einer Stange im Gravitationsfeld, siehe Abb. 2. Die Lagrangefunktion lautet

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{m\dot{y}^2}{2} - mgy. \tag{38}$$

Um die Zwangsbedingung aufzuschreiben, führen wir die Koordinate s ein, welche die Entfernung entlang der Stange parametrisiert. Die kartesischen Koordinaten des Teilchens lauten

$$x = s \sin\theta, \qquad y = L\cos\theta - s\cos\theta. \tag{39}$$

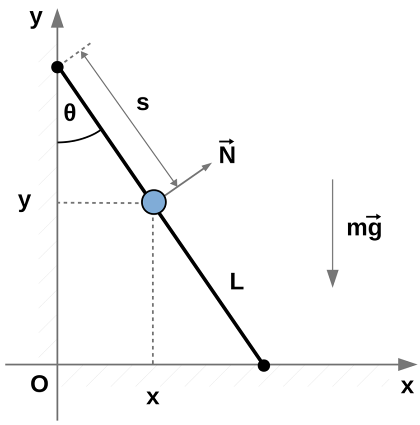

Abbildung 2: Ein Teilchen an einer Stange im Gravitationsfeld.

Wir eliminieren s und bekommen eine Zwangsbedingung für die Koordinaten des Teilchens

$$y \sin\theta + x \cos\theta - L \sin\theta \ \cos\theta = 0. \tag{40}$$

Die neue Lagrangefunktion sieht dann folgendermaßen aus

$$L' = L + \lambda \left(y \sin\theta + x \cos\theta - L \sin\theta \ \cos\theta \right), \tag{41}$$

sodass die Bewegungsgleichungen lauten

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= \lambda \cos\theta, \\ m\ddot{y} &= -mg + \lambda \sin\theta, \\ y \sin\theta &+ x \cos\theta - L \sin\theta \ \cos\theta = 0. \end{aligned} \tag{42}$$

Um diese Gleichungen zu lösen, leiten wir die letzte Gleichung nach der Zeit zweimal ab und erhalten

$$\ddot{y} \sin\theta + \ddot{x} \cos\theta = 0. \tag{43}$$

Wir addieren dann die zwei ersten Gleichungen in Gl. (42) mit den Gewichten $\cos\theta$ und $\sin\theta$ und bekommen

$$\begin{aligned} 0 &= m(\cos\theta \ddot{x} + \sin\theta \ddot{y}) = \cos\theta \ m\ddot{x} + \sin\theta \ m\ddot{y} \\ &= \lambda \cos^2\theta - mg \sin\theta + \lambda \sin^2\theta = \lambda - mg \sin\theta. \end{aligned} \tag{44}$$

Es folgt

$$\lambda = mg \sin\theta. \tag{45}$$

Wir erhalten die Bewegungsgleichungen für x und y aus Gl. (42)

$$m\ddot{x} = mg \cos\theta \ \sin\theta, \qquad m\ddot{y} = -mg + mg \sin^2\theta = -mg \cos^2\theta. \tag{46}$$

Diese Gleichungen können wir ohne weitere Probleme lösen. Zum Beispiel, falls das Teilchen sich bei $t = 0$ bei $x = 0$ in Ruhe befindet, finden wir

$$x = \frac{g \cos\theta \sin\theta \; t^2}{2}, \qquad y = L \; \cos\theta - \frac{g \cos^2\theta \; t^2}{2}. \tag{47}$$

Es gibt eine andere Möglichkeit, dieses Problem zu lösen. Wir können, statt die Lagrangemultiplikatoren einzuführen, unsere Variable s als allgemeine Koordinate benutzen. Die Verbindung zwischen x, y und s finden wir in Gl. (39). Es folgt die Lagrangefunktion

$$L = \frac{ms^2}{2} - mg(L\cos\theta - s\cos\theta), \tag{48}$$

und die Euler-Lagrange Gleichung

$$m\ddot{s} = mg\cos\theta, \tag{49}$$

sodass

$$s = \frac{g\cos\theta \; t^2}{2}. \tag{50}$$

Wir benutzen jetzt diese Lösung um $x(t)$ und $y(t)$ aufzuschreiben und erhalten die gleichen Ergebnisse, die bereits in Gl. (47) zu sehen sind.

Letztendlich wollen wir die Lösung mit Hilfe des zweiten Newtonschen Gesetz beschreiben. Um die Bewegungsgleichungen aufzuschreiben, brauchen wir die Kräfte. Es gibt die Gravitationskraft $F = -mg\vec{e}_y$ und die Zwangskraft, die senkrecht zur Stange wirkt. D.h.

$$\vec{N} = N\sin\theta\vec{e}_y + N\cos\theta\vec{e}_x. \tag{51}$$

Die Komponente der Gravitationskraft, die senkrecht zur Stange steht, lautet $-mg\sin\theta$, sodass

$$N = mg\sin\theta. \tag{52}$$

Wir erhalten dann die Bewegungsgleichungen

$$m\ddot{x} = mg\sin\theta\cos\theta, \qquad m\ddot{y} = -mg + mg\sin\theta^2. \tag{53}$$

Wenn wir diese Gleichungen mit Gl. (42) vergleichen, sehen wir, dass die Terme $\lambda\frac{\partial f}{\partial q_i}$ die Zwangskräfte beschreiben.

Hierzu gibt es noch einige Bemerkungen: Es gibt Zwangsbedingungen, die von der Geschwindigkeit abhängig sind. In diesem Fall kann man die Lagrangemultiplikatoren nicht verwenden; man muss dann die Zwangsbedingungen explizit eliminieren. Außerdem ist anzumerken, dass die Lagrangefunktion nur bis auf eine totale Zeitableitung einer Funktion von $q(t)$ und t definiert ist. D.h., dass die zwei Lagrangefunktionen $L(q, \dot{q}, t)$ und $L(q, \dot{q}, t) + \mathrm{d}f(q, t)/\mathrm{d}t$ zu den gleichen Bewegungsgleichungen führen – oder, wie wir sagen, “die gleiche Physik beschreiben”.