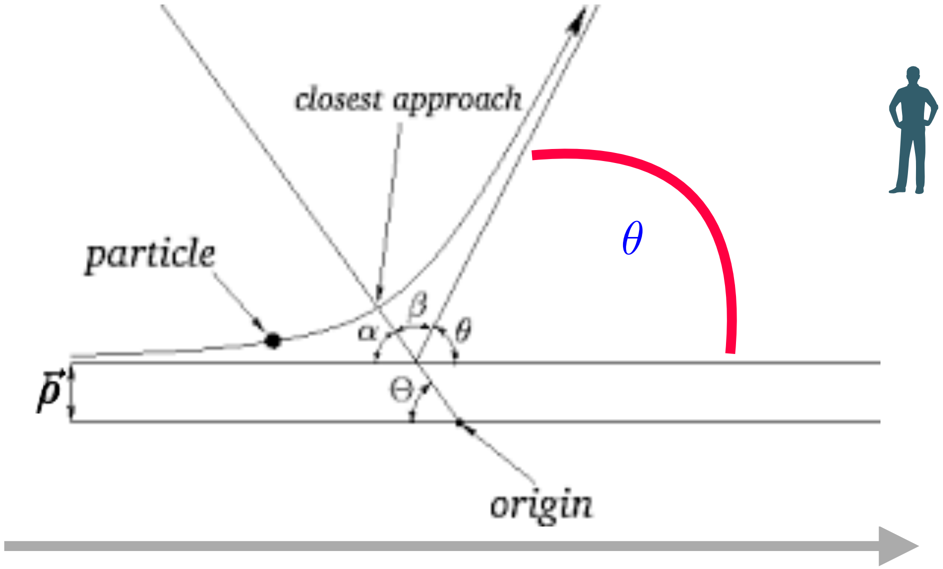
Die Zusammenfassung

Es ging um die Streuung von Teilchen.



Eine wichtige Grösse ist der Wirkungsquerschnitt. Der Wirkungsquerschnitt beschreibt (indirekt !) die Zahl von Teilchen welche um bestimmten Winkel gestreut sind.

$$\mathrm{d}\sigma = 2\pi\rho(\theta)\left|\frac{\mathrm{d}\rho(\theta)}{\mathrm{d}\cos\theta}\right|\mathrm{d}\cos\theta$$

5. Kleine Schwingungen

1. Wir betrachten ein eindimensionale Bewegung eines Teilchens mit beliebiger potentieller Energie. Es gibt ein lokales Minimum bei $x = x_0$.

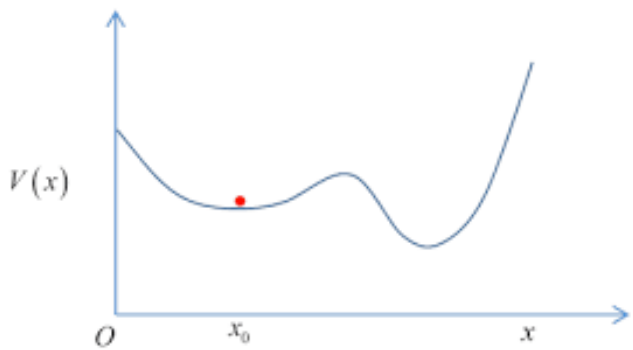
$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x)$$

Wir entwicklen die potentielle Energie in einer Taylor-Reihe um den Gleichgewichtspunkt x_0.

$$U(x) = U(x_0) + \frac{\mathrm{d}U(x)}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=x_0}(x - x_0) + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2U(x)}{\mathrm{d}x^2}\bigg|_{x=x_0}(x - x_0)^2 + \mathcal{O}((x - x_0)^3)$$

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=x_0} = 0 \qquad U(x_0) \to 0 \qquad x - x_0 \to x \qquad \frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}x^2}\bigg|_{x=x_0} = m\omega^2$$

$$\boxed{L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{m\omega^2 x^2}{2}}$$



$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + m\omega^2 x = 0$$

Freie Schwingungen: $x(t) = a\cos(\omega t + \phi)$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Zwei Anfangsbedinungen kann mann durch die Amplitude und die Anfangsphase ausgedrücken.

5. Kleine Schwingungen

2. Erzwungene Schwingungen: Externe, zeitabhängige Kraft F(t)

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{m\omega^2 x^2}{2} + xF(t)$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{F(t)}{m}$$

Ein Beispiel : $F(t) = f\cos(\gamma t + \beta)$

$$x(t) = a_0 \cos(\omega t + \phi) + A\cos(\gamma t + \beta)$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung gibt Randbedienungen.

Eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung

$$\left(-\gamma^2 + \omega^2\right) A\cos(\gamma t + \beta) = \frac{f}{m}\cos(\gamma t + \beta) \quad \Rightarrow \quad A = \frac{f}{m(\omega^2 - \gamma^2)}$$

$$\boxed{x = a_0 \cos(\omega t + \phi) + \frac{f}{m(\omega^2 - \gamma^2)}\cos(\gamma t + \beta)}$$

Ein Sonderfall: der Resonanz $\boxed{\gamma = \omega}$

$$x = \tilde{a}_0 \cos(\omega t + \tilde{\phi}) + \frac{f}{m(\omega^2 - \gamma^2)}\left(\cos(\gamma t + \beta) - \cos(\omega t + \beta)\right)$$

$$\cos(\gamma t + \beta) - \cos(\omega t + \beta) = 2\sin((\gamma + \omega)t/2 + \beta)\sin((\omega - \gamma)/2t) \approx t\ (\omega - \gamma)\sin((\gamma + \omega)t/2)$$

$$\boxed{x(t)|_{\text{res}} \approx \tilde{a}_0 \cos\left(\omega t + \tilde{\phi}_0\right) + \frac{ft}{2m\omega}\sin\left(\omega t + \beta\right)}$$

Die Amplitude wachst proportional zur Zeit! Under der Annahme einer kleinen Schwingungen, ist das nicht akzeptabel.

5. Kleine Schwingungen

2. Erzwungene Schwingungen: externe, zeitabhängige Kraft F(t)

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{m\omega^2 x^2}{2} + xF(t) \qquad \ddot{x} + \omega^2 x = \frac{F(t)}{m}$$

3. Einer allgemeine anregende Kraft. Wir können die partikuläre Lösung für beliebige externe Kräfte F(t) finden.

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + i\omega\right]\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - i\omega\right] x \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - i\omega x = \xi \qquad \boxed{\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} + i\omega\xi = \frac{F(t)}{m}}$$

$$\xi(t) = C(t) e^{i\omega t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}C(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{F(t)}{m} e^{-i\omega t} \quad \Rightarrow \quad C(t) = \int_0^t \mathrm{d}\tau\, \frac{F(\tau)}{m} e^{-i\omega\tau}$$

$$\xi(t) = e^{i\omega t} C(t) \quad \Rightarrow \quad x(t) = \mathrm{Re}\left[\frac{i\xi(t)}{\omega}\right]$$

$$\boxed{x(t) = -\int_0^t \mathrm{d}\tau \frac{F(\tau)}{m}\, \sin\left(\omega(t-\tau)\right)}$$

5. Kleine Schwingungen

Zuruck zum Resonanzfall $$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{m\omega^2 x^2}{2} + xF(t)$$ $$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{F(t)}{m}$$

$$F(t) = f\cos(\omega t + \beta)$$ $$x(t)|_{\text{res}} \approx \tilde{a}_0 \cos\left(\omega t + \tilde{\phi}_0\right) + \frac{ft}{2m\omega}\sin(\omega t + \beta)$$

Eine Amplitude,welche proportional zur Zeit zunimmt, ist nicht kompatibel mit der Näherung kleiner Schwingungen. Die Reibungskraft begrenzt die Amplitude der Schwingung.

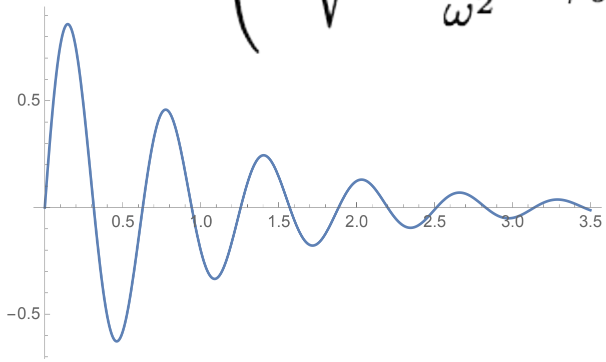
Die Reibungskraft ist proportional zur Geschwindigkeit $f_R = -2m\kappa\dot{x}$

Freie Schwinkungen mit Reibung $$\ddot{x} + 2\kappa\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

$$x = Ae^{i\lambda t}$$ $$-\lambda^2 + 2i\kappa\lambda + \omega^2 = 0, \quad \lambda = -i\kappa \pm \sqrt{\omega^2 - \kappa^2}$$

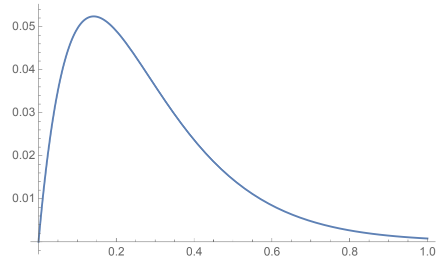
a) Mit schwacher Reibung $\omega > \kappa$

$$x(t) = Ae^{-\kappa t}\cos\left(\omega t\sqrt{1 - \frac{\kappa^2}{\omega^2}} + \phi_0\right)$$



b) Mit starker Reibung $\omega < \kappa$

$$x(t) = A_1 e^{-t(\kappa + \sqrt{\kappa^2 - \omega^2})} + A_2 e^{-t(\kappa - \sqrt{\kappa^2 - \omega^2})}$$



5. Kleine Schwingungen

Erzwungene Schwingungen mit Reibung

$$\ddot{x} + \omega^2 x + 2\kappa\dot{x} = \frac{f}{m}\cos(\gamma t + \beta)$$

$$\cos(\gamma t + \beta) = \frac{1}{2}\left(e^{i(\gamma t+\beta)} + e^{-i(\gamma t+\beta)}\right)$$

$$x = A_\pm e^{\pm i(\gamma t+\beta)}$$

$$A_\pm(\omega^2 - \gamma^2 \pm 2i\gamma\kappa) = \frac{f}{2m}$$

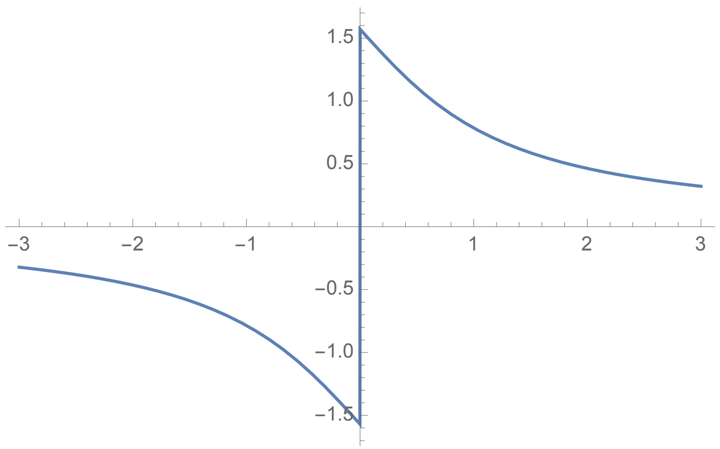
$$A_\pm = \frac{f}{2m(\omega^2 - \gamma^2 \pm 2i\gamma\kappa)} = \frac{f\, e^{\pm i\phi(\gamma)}}{2m\sqrt{(\omega^2-\gamma^2)^2 + 4\gamma^2\kappa^2}}$$

$$\phi(\gamma) = \arctan\left(\frac{2\kappa\gamma}{\gamma^2 - \omega^2}\right)$$

$$x(t) = \frac{f\cos(\gamma t + \beta + \phi(\gamma))}{m\sqrt{(\omega^2-\gamma^2)^2 + 4\gamma^2\kappa^2}}$$

$$\gamma = \omega + \epsilon, \qquad \epsilon \ll 1.$$

$$x(t) = \frac{f}{4m\omega\sqrt{\epsilon^2+\kappa^2}}\cos\left(\omega t + \beta + \arctan\left[\frac{\kappa}{\epsilon}\right]\right)$$



Die maximale Schwingungsamplitude ist endlich und nimmt nicht mit der Zeit zu.

$$x_{\max} = \frac{f}{4m\omega\kappa}$$

Die Phase der Schwingungen in der Nähe der Resonanz.