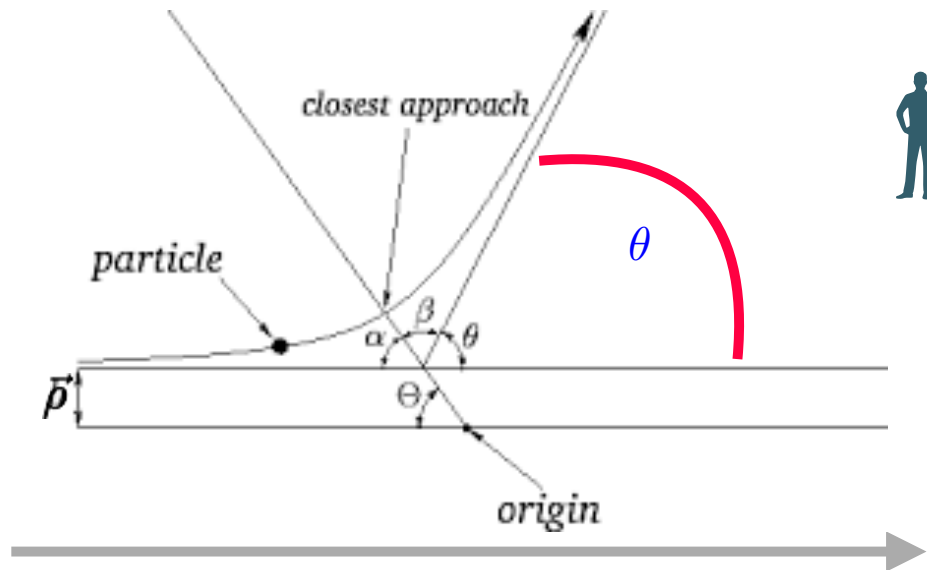


Die Zusammenfassung

Es ging um die Streuung von Teilchen.



Eine wichtige Grösse ist der Wirkungsquerschnitt. Der Wirkungsquerschnitt beschreibt (indirekt !) die Zahl von Teilchen welche um bestimmten Winkel gestreut sind. Um Wirkungsquerschnitt zu berechnen, muss man die Relation zwischen Stossparameter ρ und Streuwinkel θ bestimmen.

$$d\sigma = 2\pi\rho(\theta)\left|\frac{d\rho(\theta)}{d\cos\theta}\right|d\cos\theta$$

5. Kleine Schwingungen

1. Wir betrachten ein eindimensionale Bewegung eines Teilchens mit beliebiger potentieller Energie. Es gibt ein lokales Minimum bei $x = x_0$.

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x)$$

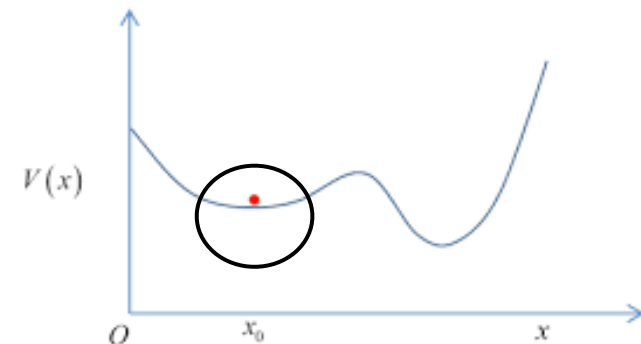
Wir entwickeln die potentielle Energie in einer Taylor-Reihe um den Gleichgewichtspunkt x_0 .

$$U(x) = U(x_0) + \left. \frac{dU(x)}{dx} \right|_{x=x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2U(x)}{dx^2} \right|_{x=x_0} (x - x_0)^2 + \mathcal{O}((x - x_0)^3)$$

$$U(x_0) \rightarrow 0 \quad \left. \frac{dU}{dx} \right|_{x=x_0} = 0 \quad x - x_0 \rightarrow x \quad \left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x=x_0} = m\omega^2$$

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{m\omega^2 x^2}{2}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x} \Rightarrow \ddot{x} + \omega^2 x = 0$$



Freie Schwingungen: $x(t) = a \cos(\omega t + \phi)$

Die Schwingungsperiode: $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Zwei Anfangsbedingungen kann man durch die Amplitude und die Anfangsphase ausdrücken.

5. Kleine Schwingungen

2. Erzwungene Schwingungen: Externe, zeitabhängige Kraft $F(t)$

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{m\omega^2 x^2}{2} + xF(t) \quad \longrightarrow \quad \boxed{\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{F(t)}{m}}$$

Ein Beispiel : $F(t) = f \cos(\gamma t + \beta)$

$$x(t) = a_0 \cos(\omega t + \phi) + A \cos(\gamma t + \beta)$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung gibt Randbedingungen.

Eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung

$$(-\gamma^2 + \omega^2) A \cos(\gamma t + \beta) = \frac{f}{m} \cos(\gamma t + \beta) \quad \Rightarrow \quad A = \frac{f}{m(\omega^2 - \gamma^2)}$$

$$\boxed{x = a_0 \cos(\omega t + \phi) + \frac{f}{m(\omega^2 - \gamma^2)} \cos(\gamma t + \beta)}$$

Ein Sonderfall:
der Resonanz

$$\boxed{\gamma = \omega} \quad x = \tilde{a}_0 \cos(\omega t + \tilde{\phi}) + \frac{f}{m(\omega^2 - \gamma^2)} (\cos(\gamma t + \beta) - \cos(\omega t + \beta))$$

$$\cos(\gamma t + \beta) - \cos(\omega t + \beta) = 2 \sin((\gamma + \omega)t/2 + \beta) \sin((\omega - \gamma)t/2) \approx t (\omega - \gamma) \sin((\gamma + \omega)t/2)$$

$$\boxed{x(t)|_{\text{res}} \approx \tilde{a}_0 \cos(\omega t + \tilde{\phi}_0) + \frac{ft}{2m\omega} \sin(\omega t + \beta)}$$

Die Amplitude wächst proportional zur Zeit! Under der Annahme einer kleinen Schwingungen, ist das nicht akzeptabel.

5. Kleine Schwingungen

2. Erzwungene Schwingungen: externe, zeitabhängige Kraft $F(t)$

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{m\omega^2 x^2}{2} + xF(t)$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{F(t)}{m}$$

3. Eine allgemeine anregende Kraft. Wir können die partikuläre Lösung für beliebige externe Kräfte $F(t)$ finden.

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \left[\frac{d}{dt} + i\omega \right] \left[\frac{d}{dt} - i\omega \right] x \quad \frac{dx}{dt} - i\omega x = \xi$$

$$\frac{d\xi}{dt} + i\omega\xi = \frac{F(t)}{m}$$

$$\xi(t) = C(t)e^{-i\omega t} \Rightarrow \frac{dC(t)}{dt} = \frac{F(t)}{m}e^{i\omega t}$$

$$C(t) = \int_0^t d\tau \frac{F(\tau)}{m} e^{i\omega\tau}$$

Weil x reell ist, bekommt man

$$x(t) = \operatorname{Re} \left[\frac{i\xi(t)}{\omega} \right]$$

$$x(t) = - \int_0^t d\tau \frac{F(\tau)}{m\omega} \sin(\omega(\tau - t))$$

Die partikuläre Lösung im Fall einer beliebigen externen Kraft

5. Kleine Schwingungen

Zurück zum Resonanzfall $L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{m\omega^2 x^2}{2} + xF(t) \quad \ddot{x} + \omega^2 x = \frac{F(t)}{m}$

$$F(t) = f \cos(\omega t + \beta) \quad x(t)|_{\text{res}} \approx \tilde{a}_0 \cos(\omega t + \tilde{\phi}_0) + \frac{ft}{2m\omega} \sin(\omega t + \beta)$$

Eine Amplitude, die proportional zur Zeit zunimmt, ist nicht kompatibel mit der Näherung kleiner Schwingungen. Die Reibungskraft begrenzt die Amplitude der Schwingung.

Die Reibungskraft ist proportional zur Geschwindigkeit $f_R = -2m\kappa\dot{x}$

Freie Schwingungen mit Reibung

$$\ddot{x} + 2\kappa\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

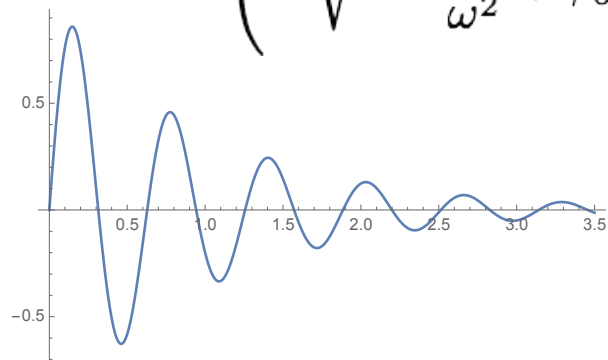
$$x = Ae^{i\lambda t}$$

$$-\lambda^2 + 2i\kappa\lambda + \omega^2 = 0, \quad \lambda = -i\kappa \pm \sqrt{\omega^2 - \kappa^2}$$

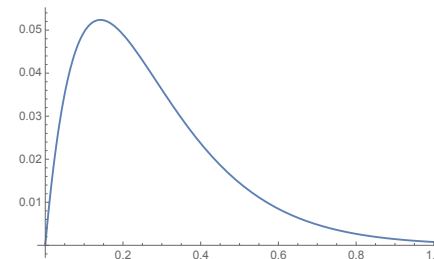
a) Mit schwacher Reibung $\omega > \kappa$

b) Mit starker Reibung $\omega < \kappa$

$$x(t) = Ae^{-\kappa t} \cos\left(\omega t \sqrt{1 - \frac{\kappa^2}{\omega^2}} + \phi_0\right)$$



$$x(t) = A_1 e^{-t(\kappa + \sqrt{\kappa^2 - \omega^2})} + A_2 e^{-t(\kappa - \sqrt{\kappa^2 - \omega^2})}$$



5. Kleine Schwingungen

Erzwungene Schwingungen mit Reibung

$$\ddot{x} + \omega^2 x + 2\kappa\dot{x} = \frac{f}{m} \cos(\gamma t + \beta) \quad \cos(\gamma t + \beta) = \frac{1}{2} \left(e^{i(\gamma t + \beta)} + e^{-i(\gamma t + \beta)} \right)$$

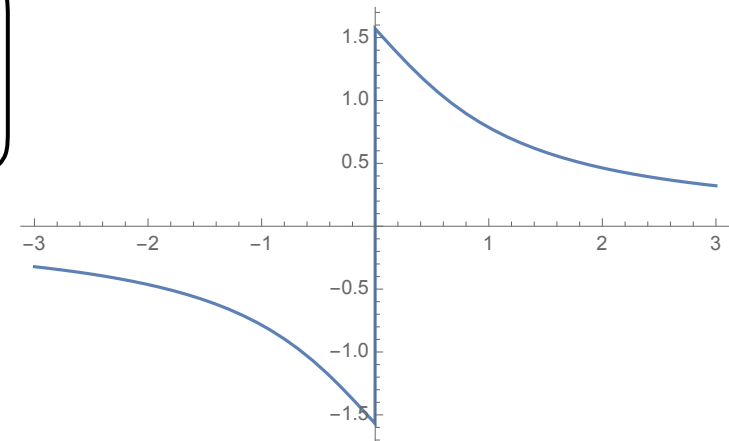
$$x = A_{\pm} e^{\pm i(\gamma t + \beta)} \quad A_{\pm}(\omega^2 - \gamma^2 \pm 2i\gamma\kappa) = \frac{f}{2m}$$

$$A_{\pm} = \frac{f}{2m(\omega^2 - \gamma^2 \pm 2i\gamma\kappa)} = \frac{f e^{\pm i\phi(\gamma)}}{2m\sqrt{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4\gamma^2\kappa^2}} \quad \phi(\gamma) = \arctan\left(\frac{2\kappa\gamma}{\gamma^2 - \omega^2}\right)$$

$$x(t) = \frac{f \cos(\gamma t + \beta + \phi(\gamma))}{m\sqrt{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4\gamma^2\kappa^2}}$$

$$\gamma = \omega + \epsilon, \quad \epsilon \ll 1.$$

$$x(t) = \frac{f}{4m\omega\sqrt{\epsilon^2 + \kappa^2}} \cos\left(\omega t + \beta + \arctan\left[\frac{\kappa}{\epsilon}\right]\right)$$



Die maximale Schwingungsamplitude ist endlich und nimmt nicht mit der Zeit zu.

$$x_{\max} = \frac{f}{4m\omega\kappa}$$

Die Phase der Schwingungen in der Nähe der Resonanz.