4. Zusammenfassung

Das Kepler-Problem (Planeten, Satelliten, Atome u.s.w.).

$$L = \frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2} - U(r), \quad U(r) = -\frac{\alpha}{r}$$

1. $E = U_{min} < 0$. Die Bahn ist ein Kreis mit Radius r_0. Das Teilchen bewegt sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um das Zentrum.

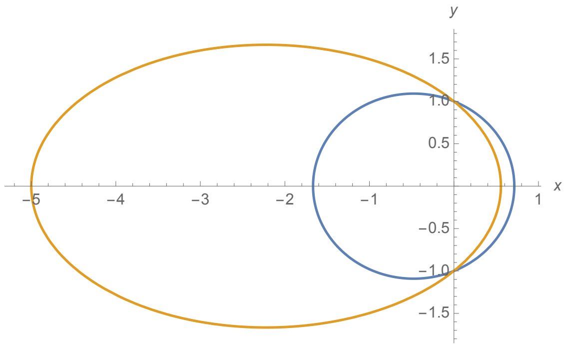
$$r_0 = \frac{M^2}{m\alpha}$$

2. $U_{min} < E < 0$. Die Bewegung ist finit.

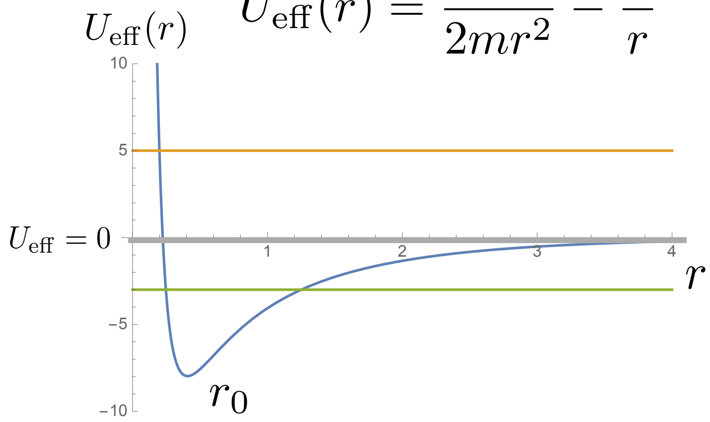
$$U_{\text{eff}}(r) = \frac{M^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r}$$

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\phi} \qquad p = \frac{M^2}{m\alpha} \qquad e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}}$$

$$T = \pi\alpha\sqrt{\frac{m}{2|E|^3}}$$

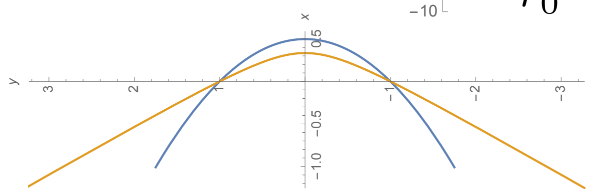


$e < 1$



3. $E > 0$. Die Bewegung ist infinit.

Die Trajektorie ist eine Hyperbel.

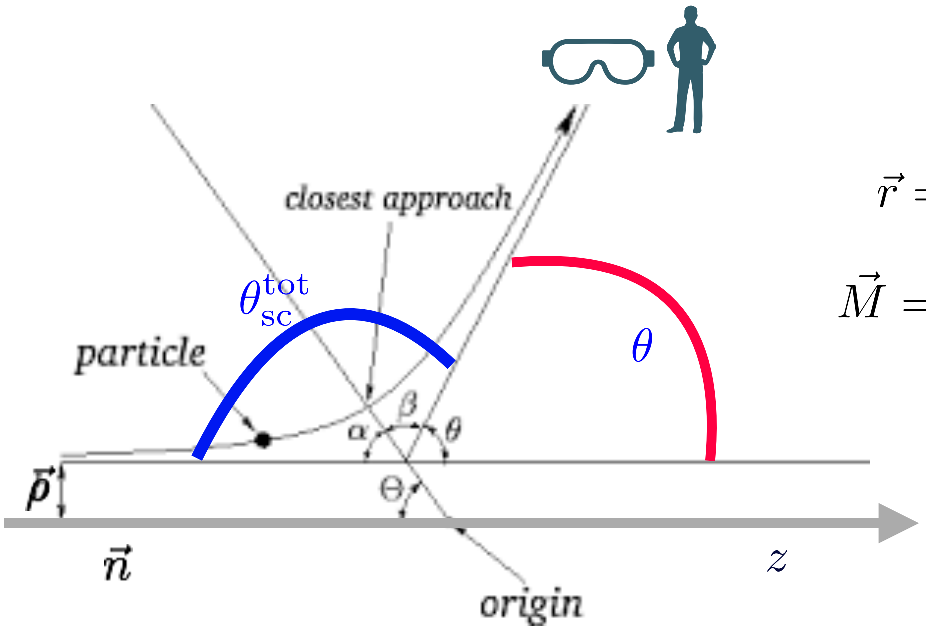


4. Der Runge-Lenz-Vektor $\vec{A} = [\vec{p} \times \vec{M}] - m\frac{\alpha\vec{r}}{r}$ ist erhalten .

4. Streuung von Teilchen

Die Streuung von Teilchen ist eine wichtige indirekte Methode Systeme zu unterschuchen die wir nicht anders erreichen können.

Streuung durch eine Zentralkraft: Wir schicken ein Teilchen mit gegebenem Anfangsimpuls von r = unendlich in die Richtung des Kraftzentrums. Wir betrachten nur abstossende Kräfte.



$$\lim_{r\to\infty} U(r) \to 0 \quad \Rightarrow \quad E = \frac{mv_\infty^2}{2}$$

$$\vec r = z\vec n + \vec\rho, \quad \vec v_\infty = v_\infty \vec n \qquad \vec n \cdot \vec\rho = 0$$

$$\vec M = m\,[\vec r \times \vec v] = m\,[(z\vec n + \vec\rho) \times \vec v_\infty] = m[\vec\rho \times \vec v_\infty]$$

$$M = mv_\infty \rho$$ **Der Stossparameter ρ**

$$\theta_{\mathrm{sc}}(r) = \int_r^\infty \frac{\mathrm{d}\bar r \frac{M}{2m\bar r^2}}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U_{\mathrm{eff}}(\bar r)\right)}}$$

$$\theta = \pi - 2\theta_{\mathrm{sc}}(r_{\mathrm{min}})$$

$$\theta = \pi - 2\rho \int_{r_{\mathrm{min}}}^\infty \frac{\mathrm{d}r}{r^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{2U(r)}{mv_\infty^2}}}$$

Die Beziehung des Streuwinkels θ und des Stossparameters ρ.

4. Streuung von Teilchen

Wir betrachten homogenen zeitunabhäbgigen Strahl von Teilchen weit weg von Kraftzentrum . Wie viele Teilchen werden um einen bestimmten Winkel gestreut?

$$\theta = \pi - 2\rho \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\mathrm{d}r}{r^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{2U(r)}{mv_\infty^2}}} \qquad \Rightarrow \qquad \rho = \rho(\theta)$$

$$\mathrm{d}N(\theta) = 2\pi\rho(\theta)\mathrm{d}\rho(\theta)\; nv_\infty$$

Der Fluss der Teilchen: $J = nv_\infty$

Der Wirkungsquerschnitt:

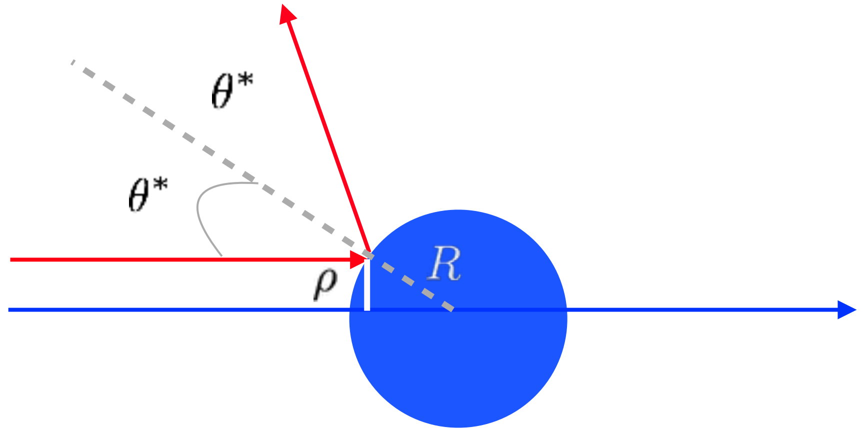
$$\boxed{\mathrm{d}\sigma = \frac{\mathrm{d}N(\theta)}{J} = 2\pi\rho(\theta)\mathrm{d}\rho(\theta)}$$

$$\boxed{\mathrm{d}\sigma = 2\pi\rho(\theta)\left|\frac{\mathrm{d}\rho(\theta)}{\mathrm{d}\cos\theta}\right|\mathrm{d}\cos\theta \qquad \sigma = \int \mathrm{d}\sigma, \quad 0 < \theta < \pi}$$

Durch Integration über den Winkel erhält mann den totalen Wirkungsquerschnitt.

4. Streuung von Teilchen

Streuung an einer harten, unendlich schweren Kugel



$$\boxed{d\sigma = 2\pi\rho(\theta)\left|\frac{d\rho(\theta)}{d\cos\theta}\right| d\cos\theta}$$

$$U(r) = \begin{cases} 0, & r > R \\ \infty, & r < R \end{cases} \qquad r_{\min} = R$$

$$\theta = \pi - 2\rho\int_{r_{\min}}^{\infty}\frac{dr}{r^2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\rho^2}{r^2}-\frac{2U(r)}{mv_\infty^2}}} \quad \rightarrow \quad \theta = \pi - 2\rho\int_R^{\infty}\frac{dr}{r^2\sqrt{1-\frac{\rho^2}{r^2}}} \qquad \boxed{\rho < R}$$

$$r = \frac{\rho}{\xi} \qquad \theta = \pi - 2\int_0^{\rho/R}\frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \qquad \xi = \sin\phi \qquad \theta = \pi - 2\arcsin(\rho/R)$$

$$\boxed{\rho(\theta) = R\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

Der Einfallswinkel und der Reflektionswinkel sind gleich. $\sin\theta^* = \frac{\rho}{R}$

$$\left|\frac{d\rho}{d\theta}\right| = \frac{R\sin\frac{\theta}{2}}{2} \qquad \boxed{\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{2\pi\rho}{\sin\theta}\left|\frac{d\rho}{d\theta}\right| = \frac{2\pi R^2\cos\theta/2\sin\theta/2}{2\sin\theta} = \frac{\pi R^2}{2}} \qquad \boxed{\int_{-1}^{1}\frac{d\sigma}{d\cos\theta}\,d\cos\theta = \pi R^2}$$

4. Streuung von Teilchen

Rutherford-Streuung $U(r) = \pm\frac{\alpha}{r}$ $\theta = \pi - 2\rho \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\mathrm{d}r}{r^2\sqrt{1-\frac{\rho^2}{r^2}-\frac{2\alpha}{mv^2 r}}}$ $v_\infty \leftrightarrow v$

$$1-\frac{\rho^2}{r^2}-\frac{2\alpha}{mv^2r} = 1+\frac{\alpha^2}{m^2v^4\rho^2}-\left(\frac{\rho}{r}+\frac{\alpha}{mv^2\rho}\right)^2 \qquad \frac{\rho}{r}+\frac{\alpha}{mv^2\rho} = \sqrt{1+\frac{\alpha^2}{m^2v^4\rho^2}}\,\sin\xi$$

$$1-\frac{\rho^2}{r^2}-\frac{2\alpha}{mv^2r} = \left(1+\frac{\alpha^2}{m^2v^4\rho^2}\right)\left(1-\sin^2\xi\right)$$

$$\boxed{\theta = \pi - 2\int_{\xi_0}^{\pi/2}\mathrm{d}\xi, \qquad \xi_0 = \arcsin\frac{\frac{\alpha}{mv^2\rho}}{\sqrt{1+\frac{\alpha^2}{m^2v^4\rho^2}}}}$$

$$\sin\frac{\theta}{2} = \frac{\alpha}{mv^2\rho\sqrt{1+\frac{\alpha^2}{m^2v^4\rho^2}}} \quad\Rightarrow\quad \rho(\theta) = \frac{\alpha}{mv^2\tan\frac{\theta}{2}} \qquad \left|\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta}\right| = \frac{\alpha}{mv^2}\frac{1}{\tan^2\frac{\theta}{2}}\frac{1}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

$$\mathrm{d}\sigma = 2\pi\rho(\theta)\left|\frac{\mathrm{d}\rho(\theta)}{\mathrm{d}\cos\theta}\right|\mathrm{d}\cos\theta$$

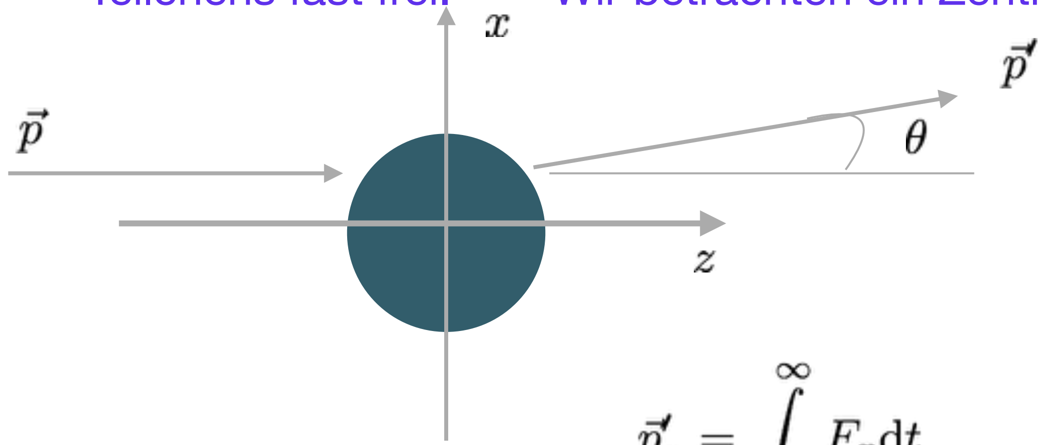
$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\cos\theta} = 2\pi\left(\frac{\alpha}{2mv^2}\right)^2\frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}}}$$

$$\boxed{\begin{gathered}\sin\frac{\theta}{2}\approx\frac{\theta}{2}\\ \mathrm{d}\cos\theta = \sin\theta\,\mathrm{d}\theta \approx \theta\,\mathrm{d}\theta\end{gathered}}$$

$$\sigma_{\mathrm{tot}} = \int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\cos\theta}\,\mathrm{d}\cos\theta \sim \int_0 \frac{\theta\,\mathrm{d}\theta}{\theta^4} = \infty$$

4. Streuung von Teilchen

Streuung um einen kleinen Winkeln tritt im Fall eines schwachen Feldes auf (z.B. wenn der Stossparameter gross ist). In diesem Fall ist die Bewegung des Teilchens fast frei.   Wir betrachten ein Zentralfeld.



$$\sin\theta \approx \theta = \frac{\vec{p}_x'}{\vec{p}_z'}$$

$$|\vec{p}| = |\vec{p}'|, \qquad p_x' \ll p_z'$$

$$\vec{p}_z' \sim p = mv$$

$$\vec{p}_x' = \int_{-\infty}^{\infty} F_x \mathrm{d}t \qquad\qquad F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial r}\frac{x}{r}$$

$$\theta \approx -\frac{1}{mv}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial U}{\partial r}\frac{x\mathrm{d}t}{r}$$

Wir schreiben den Integrand mit Hilfe der Parametresierung der Bahn des freies Teilchens um:

$$x \to \rho, \quad \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}z}{v}$$

$$z = \pm\sqrt{r^2-\rho^2} \qquad \mathrm{d}z = \frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{r^2-\rho^2}} \qquad \theta = -\frac{2\rho}{mv^2}\int_{\rho}^{\infty}\frac{\partial U}{\partial r}\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{r^2-\rho^2}}$$

$$U(r) = \frac{\alpha}{r^n}, \quad \Rightarrow \quad \rho \sim \theta^{-1/n} \quad \Rightarrow \mathrm{d}\sigma \sim \frac{\mathrm{d}\theta}{\theta^{1+2/n}} \qquad \sigma \sim \int_0 \frac{\mathrm{d}\theta}{\theta^{1+2/n}} \sim \infty!$$

Wir finden das im Fall von Feldern mit unendlicher Reichweite, divergiert der totale Wirkungsquerschnitt.