

Zusammenfassung

1. Eindimensionale Bewegung

$$T = \sqrt{2m} \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} \quad \rightarrow \quad T = 2\sqrt{2m} \frac{\partial}{\partial E} \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} dx \sqrt{E - U(x)}$$

$$U(x) = U_0(x) + \delta U(x)$$

$$\delta U(x) \ll U_0(x)$$

$$\delta T = -\sqrt{2m} \frac{\partial}{\partial E} \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{dx \delta U(x)}{\sqrt{E - U_0(x)}}$$

$$L = \frac{m_1 \dot{\vec{r}}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{\vec{r}}_2^2}{2} - U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

2. Zweikörperproblem

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}, \quad \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

$$m_{\text{tot}} = m_1 + m_2$$

$$L = \frac{m_{\text{tot}} \dot{\vec{R}}^2}{2} + \frac{\mu \dot{\vec{r}}^2}{2} - U(\vec{r})$$

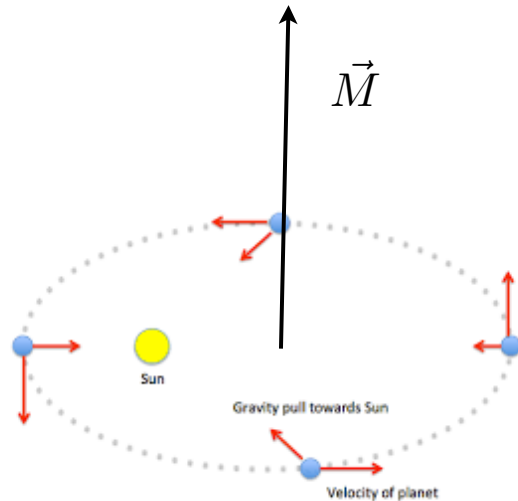
$$\frac{d}{dt} \dot{\vec{R}} = 0, \quad \mu \ddot{\vec{r}} = -\frac{\partial U(\vec{r})}{\partial \vec{r}}$$

Das Zweikörperproblem kann man als die freie Bewegung des Schwerpunktes des Systems und die Bewegung eines Teilchens mit reduzierter Masse im externen Kraftfeld beschreiben.

Zusammenfassung

3. Bewegung im Zentralfeld kann zum eindimensionalen Fall reduziert werden.

Der Drehimpuls ist erhalten. Die Bewegung findet in der Ebene orthogonal zum Drehimpulsvektor statt. Die Energie ist erhalten.



$$L = \frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2} - U(r) \quad M = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2\dot{\phi}$$

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{M^2}{2mr^2} + U(r) = \frac{m\dot{r}^2}{2} + U_{\text{eff}}(r)$$

$$U_{\text{eff}}(r) = \frac{M^2}{2mr^2} + U(r)$$

$$t - t_0 = \pm \int^r \frac{d\bar{r}}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - U_{\text{eff}}(\bar{r}))}}$$

$$\phi - \phi_0 = \int^r \frac{dr \frac{M}{mr^2}}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - U_{\text{eff}}(r))}}$$

3. Drei-dimensionale Bewegung

Das Kepler-Problem (Planeten, Satelliten, Atome u.s.w.).

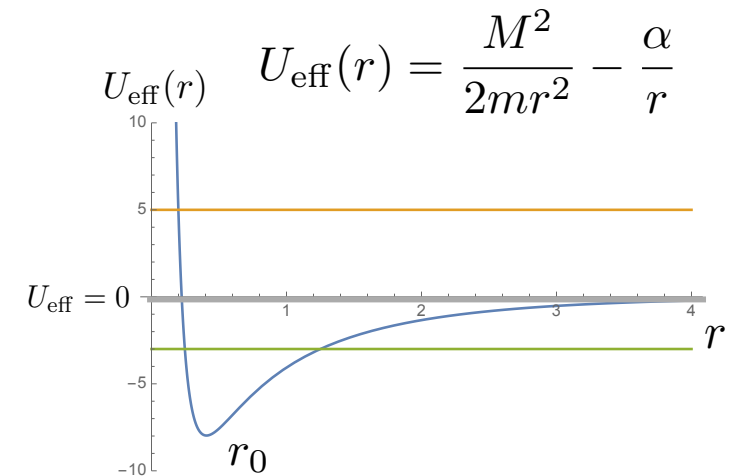
$$L = \frac{m\dot{r}^2}{2} - U(r), \quad U(r) = -\frac{\alpha}{r}$$

Die Kopplungskonstante α kann entweder positiv (anziehende Kraft) oder negativ (abstossende Kraft) sein.

Betrachten wir eine positive Kopplungskonstante; in diesem Fall besitzt die effektive potentielle Energie ein Minimum.

$$\frac{dU_{\text{eff}}(r)}{dr} = 0, \quad \Rightarrow \quad -\frac{M^2}{2mr_0} + \frac{\alpha}{r_0^2} = 0, \quad r_0 = \frac{M^2}{m\alpha}$$

$$U_{\text{eff}}^{\text{min}} = -\frac{\alpha}{2r_0} = -\frac{m\alpha^2}{2M^2}$$



1. $E = U^{\text{min}} < 0$. Die Bahn ist ein Kreis mit dem Radius r_0 . Das Teilchen bewegt sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um das Zentrum.

$$\dot{\phi} = \frac{M}{mr_0^2} \Rightarrow T = \frac{2\pi mr_0^2}{M} = \frac{2\pi M^3}{m\alpha^2} = \pi\alpha\sqrt{\frac{m}{2|E|}^3}$$

$$E = -\frac{\alpha}{2r_0}, \quad U = -\frac{\alpha}{r_0} \Rightarrow K = -\frac{U}{2}$$

3. Dreidimensionale Bewegung

Das Kepler-Problem

$$L = \frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2} + \frac{\alpha}{r}$$

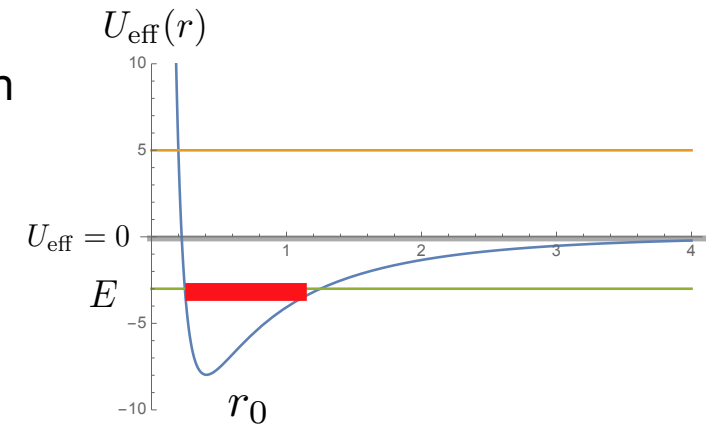
$$U_{\text{eff}}(r) = \frac{M^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r}$$

2. $U^{\text{min}} < E < 0$. Die Bewegung findet in einem endlichen Raum statt (die Bewegung ist finit).

$$\phi - \phi_0 = \int \frac{d\bar{r} \frac{M}{m\bar{r}^2}}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U_{\text{eff}}(\bar{r}))}}$$

Um das Integral berechnen zu können, schreiben wir den Integrand um

$$\begin{aligned} \frac{2}{m}(E - U_{\text{eff}}(r)) &= \frac{2E}{m} + \frac{2\alpha}{mr} - \frac{M^2}{m^2r^2} \\ &= -\left(\frac{M}{mr} - \frac{\alpha}{m}\right)^2 + \frac{\alpha^2}{M^2} + \frac{2E}{m} = \frac{\alpha^2}{M^2} + \frac{2E}{m} - \left(\frac{M}{mr} - \frac{\alpha}{m}\right)^2 \end{aligned}$$



3. Dreidimensionale Bewegung

Das Kepler-Problem

$$L = \frac{m\vec{r}^2}{2} + \frac{\alpha}{r}$$

$$U_{\text{eff}}(r) = \frac{M^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r}$$

2. $U_{\text{min}} < E < 0$. Die Bewegung ist finit.

$$\phi - \phi_0 = \int \frac{d\bar{r} \frac{M}{m\bar{r}^2}}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U_{\text{eff}}(\bar{r}))}}$$

$$\frac{2}{m}(E - U_{\text{eff}}(r)) = \frac{\alpha^2}{M^2} + \frac{2E}{m} - \left(\frac{M}{mr} - \frac{\alpha}{M}\right)^2$$

$$\frac{\alpha^2}{M^2} + \frac{2E}{m} > 0, \quad \Leftrightarrow \quad E > U_{\text{eff}}^{\text{min}} = -\frac{m\alpha^2}{2M^2}$$

Variablentransformation #1

$$\bar{r} = \frac{1}{\xi}, \quad \frac{d\bar{r}}{\bar{r}^2} = d\xi$$

$$\phi - \phi_0 = \frac{M}{m} \int_{1/r} \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{\alpha^2}{M^2} + \frac{2E}{m} - \left(\frac{M}{m}\xi - \frac{\alpha}{M}\right)^2}}$$

Variablentransformation #2

$$\xi = \frac{m}{M} \left(\sqrt{\frac{\alpha^2}{M^2} + \frac{2E}{m}} \cos \theta + \frac{\alpha}{M} \right)$$

$$\begin{aligned} \phi - \phi_0 &= \int d\theta = \\ &= \arccos \left[\left(\frac{M}{mr} - \frac{\alpha}{M} \right) / \sqrt{\frac{\alpha^2}{M^2} + \frac{2E}{m}} \right] \\ &= -\arccos \left[\left(\frac{M}{mr} - \frac{\alpha}{M} \right) / \sqrt{\frac{\alpha^2}{M^2} + \frac{2E}{m}} \right] \end{aligned}$$

3. Dreidimensionale Bewegung

Das Kepler-Problem $L = \frac{m\vec{r}^2}{2} + \frac{\alpha}{r} \quad U_{\text{eff}}(r) = \frac{M^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r}$

2. $U_{\text{min}} < E < 0$. Die Bewegung ist finit.

$$\phi - \phi_0 = \int_{\arccos\left[\left(\frac{M}{mr} - \frac{\alpha}{M}\right) / \sqrt{\frac{\alpha^2}{M^2} + \frac{2E}{m}}\right]} d\theta = -\arccos\left[\left(\frac{M}{mr} - \frac{\alpha}{M}\right) / \sqrt{\frac{\alpha^2}{M^2} + \frac{2E}{m}}\right]$$

Wir drücken jetzt r durch den Winkel aus und bestimmen die Trajektorie.

Die Trajektorie ist ein Ellipse (geschlossen!); p heisst "Parameter", e heisst "Exzentrizität"

$$\boxed{r = \frac{p}{1 + e \cos \phi}} \quad p = \frac{M^2}{m\alpha} \quad e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}}$$

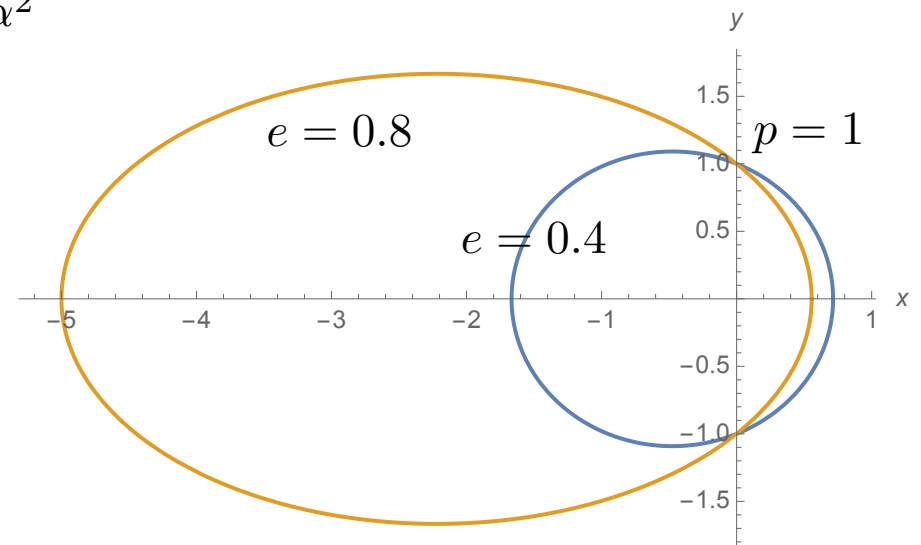
$$e < 1 \quad (E < 0!)$$

$$r + er \cos \phi = p \Rightarrow r + ex = p$$

$$r = p - ex \Rightarrow x^2 + y^2 = (p - ex)^2$$

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad x_0 = -\frac{pe}{1 - e^2}$$

$$a = \frac{p}{1 - e^2} \quad b = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}}$$



3. Dreidimensionale Bewegung

Das Kepler Problem $L = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{\alpha}{r} \quad U_{\text{eff}}(r) = \frac{M^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r}$

2. $U^{\text{min}} < E < 0$. Die Bewegung ist finit.

Wie viel Zeit braucht das Teilchen um das Zentrum einmal zu umrunden?

$$M = mr^2 \frac{d\phi}{dt} \Rightarrow dt = \frac{mr^2 d\phi}{M} \Rightarrow dt = \frac{mp^2 d\phi}{M(1 + e \cos \phi)}$$

$$T = \frac{p^2 m}{M} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{(1 + e \cos \phi)^2}$$

Wie kann man das Integral ausrechnen? Wir formen zunächst das Integral um:

$$T = \frac{p^2 m}{M} (-1) \left. \frac{\partial}{\partial a} \right|_{a=1} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{(a + e \cos \phi)}$$

3. Dreidimensionale Bewegung

Die Umlaufzeit

$$T = \frac{p^2 m}{M} (-1) \left. \frac{\partial}{\partial a} \right|_{a=1} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{(a + e \cos \phi)}$$

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{a + e \cos \phi} = \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{a - e \cos \phi}$$

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\phi \left[\frac{1}{a + e \cos \phi} + \frac{1}{a - e \cos \phi} \right] = a \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{a^2 - e^2 \cos^2 \phi} = 4a \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{a^2 - e^2 \cos^2 \phi}$$

$$\xi = \tan \phi \Rightarrow d\xi = \frac{d\phi}{\cos^2 \phi} \quad \cos^2 \phi = \frac{1}{1 + \xi^2} \quad 0 < \phi < \pi/2 \Leftrightarrow 0 < \xi < \infty$$

$$I = 4a \int_0^{\infty} \frac{d\xi}{a^2 - e^2 + a^2 \xi^2}$$

$$\xi = \frac{\sqrt{a^2 - e^2}}{a} \mu$$

$$I = \frac{4}{\sqrt{a^2 - e^2}} \int_0^{\infty} \frac{d\mu}{1 + \mu^2} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - e^2}} I_{a=1, e=0} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - e^2}}$$

$$-\left. \frac{\partial}{\partial a} I(a) \right|_{a=1} = \frac{2\pi}{(1 - e^2)^{3/2}}$$

$$T = \frac{p^2 m}{M} (-1) \left. \frac{\partial}{\partial a} I(a) \right|_{a=1} = \frac{2\pi p^2 m}{M(1 - e^2)^{3/2}} = \pi \alpha \sqrt{\frac{m}{2|E|^3}}$$

3. Dreidimensionale Bewegung

Das Kepler Problem
$$L = \frac{m\vec{r}^2}{2} + \frac{\alpha}{r} \quad U_{\text{eff}}(r) = \frac{M^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r}$$

3. $E > 0$. Die Bewegung findet in einem unbegrenzten Raum statt (die Bewegung ist infinit); das Teilchen kommt aus dem Unendliche und verschwindet ins Unendliche wieder

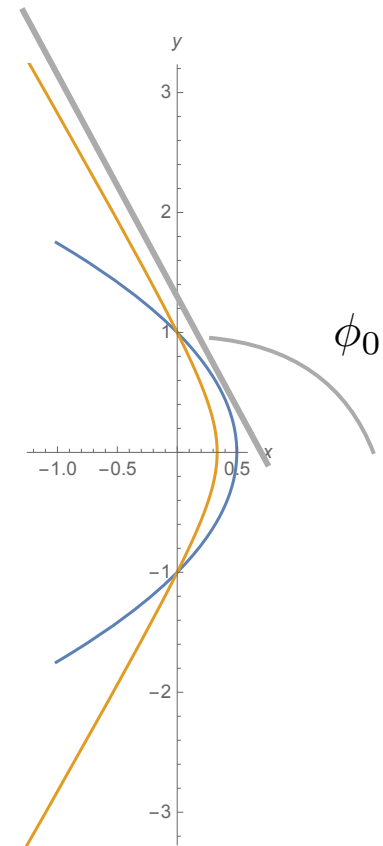
Die Trajektorie ist eine Hyperbel

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \phi}, \quad p = \frac{M}{m\alpha}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}} \quad e > 1$$

$$\phi = \{\phi_0 = \arccos(-e^{-1}), 2\pi - \phi_0\} \Rightarrow r \rightarrow \infty$$

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad r_{\min} = \frac{p}{1 + e}$$

$$x_0 = \frac{pe}{e^2 - 1}, \quad a = \frac{p}{e^2 - 1}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{e^2 - 1}}$$



3. Dreidimensionale Bewegung

Das Kepler Problem

$$L = \frac{m\vec{r}^2}{2} + \frac{\alpha}{r} \quad U_{\text{eff}}(r) = \frac{M^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r}$$

3. Im Fall der anziehenden Kraft sind alle Bahnen infinit. Die Trajektorien sind Hyperbeln; die Ausdrücke für p und e stimmen mit den vorherigen Ausdrücke überein.

$$r = \frac{p}{-1 + e \cos \phi} \quad e > 1 \quad r_{\min} = \frac{p}{e - 1}$$

4. Der Runge-Lenz-Vektor $\vec{A} = [\vec{p} \times \vec{M}] - m \frac{\alpha \vec{r}}{r}$ ist erhalten.

$\frac{d\vec{A}}{dt} = 0$ Wie können den Runge-Lenz-Vektor verwenden um die Trajektorien zu bestimmen.

$$\vec{r} \cdot \vec{A} = \vec{r} \cdot [\vec{p} \times \vec{M}] - m\alpha r$$

$$\vec{r} \cdot \vec{A} = Ar \cos \phi \quad \vec{r} \cdot [\vec{p} \times \vec{M}] = \vec{M} \cdot [\vec{r} \times \vec{p}] = \vec{M}^2$$

$$Ar \cos \phi = M^2 - m\alpha r \Rightarrow r = \frac{M^2}{m\alpha(1 + \frac{A}{m\alpha} \cos \phi)} \quad e = \frac{A}{m\alpha}$$

