

Zusammenfassung

1. Ähnlichkeitstransformationen

$$U(\lambda \vec{r}) = \lambda^n U(\vec{r})$$

Das Virialtheorem: Relation zwischen zeitlich gemittelten kinetischer und potentieller Energie eines mechanischen Systems

$$\langle K \rangle = \frac{n}{2} \langle U \rangle \qquad \langle f(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt f(t)$$

Die Ähnlichkeit der Bahnen: Relation zwischen räumlichen Abmessungen und Umlaufzeiten zweier Bahnen eines mechanischen Systems

$$\frac{L_2}{L_1} = \lambda, \quad \frac{T_2}{T_1} = \beta \quad \Rightarrow \quad \frac{T_2}{T_1} = \beta = \lambda^{1-n/2} = \left(\frac{L_2}{L_1} \right)^{1-n/2}$$

2. Eindimensionale Bewegung

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x) \qquad E = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{x} - L = \frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x)$$

$$\sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{d\xi}{\sqrt{E - U(\xi)}} = t - t_0 \qquad T = \sqrt{2m} \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}, \qquad E - U(x_{1,2}) = 0$$

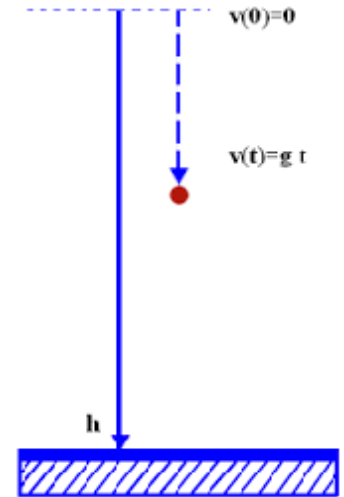
3. Eindimensionale Bewegung

Beispiel: Ein Teilchen im Gravitationsfeld; im Moment $t=0$ auf Höhe h in Ruhe. Wir berechnen die Zeitabhängigkeit der Bahn $z(t)$.

$$L = \frac{m\dot{z}^2}{2} - mgz \quad E = mgh \quad \frac{dz}{dt} < 0 \Rightarrow t = -\sqrt{\frac{m}{2}} \int_h^z \frac{d\xi}{\sqrt{E - mg\xi}}$$

$$\int \frac{d\xi}{\sqrt{E - mg\xi}} = -\frac{2}{mg} \sqrt{E - mg\xi} \quad t = \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{2}{mg} \sqrt{mgh - mg\xi} \Big|_h^z$$

$$z(t) = h - \frac{gt^2}{2}$$

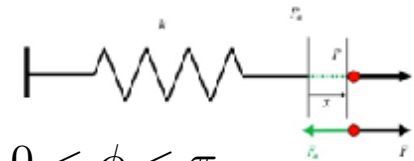


Beispiel: Ein Teilchen an einer Feder. Wir berechnen die Periodendauer der Schwingung.

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}$$

$$T = \sqrt{2m} \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}, \quad E - U(x_{1,2}) = 0$$

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{2E}{k}} \quad T = \sqrt{2m} \int_{-\sqrt{\frac{2E}{k}}}^{\sqrt{\frac{2E}{k}}} \frac{dx}{\sqrt{E - \frac{kx^2}{2}}} \quad x = \sqrt{\frac{2E}{k}} \cos \phi, \quad 0 < \phi < \pi$$



$$T = 2\sqrt{\frac{m}{k}} \int_0^\pi \frac{\sin \phi \, d\phi}{\sqrt{1 - \cos^2 \phi}} = 2\sqrt{\frac{m}{k}} \int_0^\pi d\phi = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

3. Eindimensionale Bewegung

Korrekturen zur Periodendauer der Schwingungen: Störungstheorie

$$T = \sqrt{2m} \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}, \quad E - U(x_{1,2}) = 0 \quad U(x) = U_0(x) + \delta U(x)$$

$$\delta U(x) \ll U_0(x)$$

Naive Vorgehensweise: in $\delta U(x)$ entwickeln und Term für Term integrieren.

$$\frac{1}{\sqrt{E - U(x)}} = \frac{1}{\sqrt{E - U_0(x) - \delta U(x)}} \approx \frac{1}{\sqrt{E - U_0(x)}} + \frac{1}{2} \frac{\delta U(x)}{(E - U_0(x))^{3/2}} + \mathcal{O}(\delta U^2)$$

$$T_0 = \sqrt{2m} \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{dx}{\sqrt{E - U_0(x)}} \quad T \approx T_0 \quad \delta T = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{dx \delta U(x)}{(E - U_0(x))^{3/2}}$$

$$U_0(x_{1,2}) = E \Rightarrow U_0(x) \Big|_{x \approx x_{1,2}} \approx E + \frac{\partial U_0}{\partial x} \Big|_{x=x_{1,2}} (x_1 - x_2) + \mathcal{O}((x - x_{1,2})^2)$$

$$\delta T \approx \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx \delta U(x)}{(x - x_1)^{3/2}} \sim \frac{1}{(x - x_1)^{1/2}} \Big|_{x=x_1} = \infty!$$

Die Entwicklung eines Integrals in einem kleinen Parameter kann (generell) nicht durch die Entwicklung des Integranden in diesem kleinen Parameter berechnet werden. Um das zu ermöglichen, muss der Integrand nicht singuläre (glatt genug) sein.

3. Eindimensionale Bewegung

Wir müssen zunächst das Integral glatter (weniger singuläre) machen, insbesondere an den Grenzen. Die Umschreibung ist nur möglich weil die Geschwindigkeiten des Teilchens an den Integralgrenzen Null sind.

$$T = \sqrt{2m} \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} \rightarrow T = 2\sqrt{2m} \frac{\partial}{\partial E} \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} dx \sqrt{E - U(x)}$$

$$\sqrt{E - U(x_{1,2})} = 0$$

Jetzt können wir in $\delta U(x)$ entwickeln:

$$U(x) = U_0(x) + \delta U(x)$$

$$\delta T = -\sqrt{2m} \frac{\partial}{\partial E} \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{dx \delta U(x)}{\sqrt{E - U_0(x)}}$$

Wir können jetzt überprüfen ob der Integrand integrierbar ist. Dazu müssen wir das Verhalten an den Integralgrenzen zu überprüfen.

$$\frac{1}{\sqrt{E - U_0(x)}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{x_{1,2} - x}}$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{x - x_1}} \sim \sqrt{x - x_1} \rightarrow 0.$$

3. Dreidimensionale Bewegung

Integration der Bewegungsgleichungen in mehr als einer Dimension ist nicht immer möglich. Es gibt aber sehr wichtige Fälle wo es möglich ist.

Zwei-Körper-Problem. Der Schwerpunkstimpuls ist erhalten.

$$L = \frac{m_1 \dot{\vec{r}}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{\vec{r}}_2^2}{2} - U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

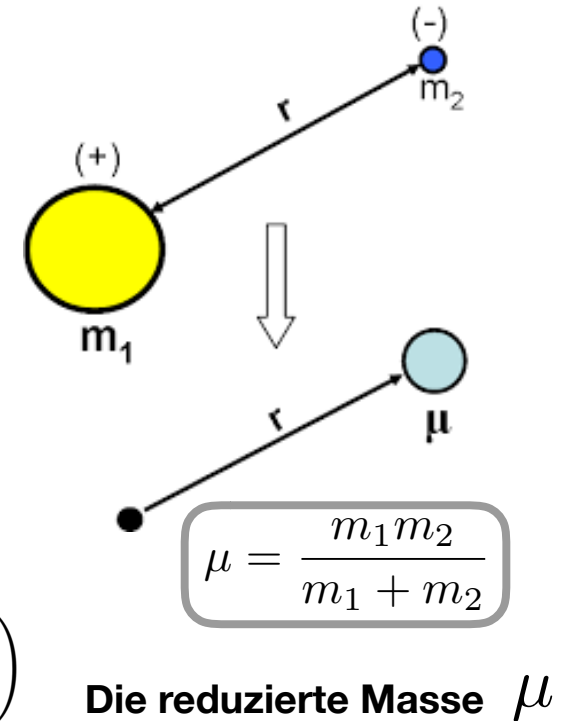
$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}, \quad \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}, \quad \vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r},$$

$$\begin{aligned} \frac{m_1}{2} \dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{\vec{r}}_2^2 &= \frac{m_1}{2} \left(\dot{\vec{R}}^2 + 2 \dot{\vec{R}} \cdot \dot{\vec{r}} \frac{m_2}{m_2 + m_1} + \frac{m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} \dot{\vec{r}}^2 \right) \\ &+ \frac{m_2}{2} \left(\dot{\vec{R}}^2 - 2 \dot{\vec{R}} \cdot \dot{\vec{r}} \frac{m_1}{m_2 + m_1} + \frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} \dot{\vec{r}}^2 \right) = \frac{(m_1 + m_2) \dot{\vec{R}}^2}{2} + \frac{\mu \dot{\vec{r}}^2}{2} \end{aligned}$$

$$L = \frac{m_{\text{tot}} \dot{\vec{R}}^2}{2} + \frac{\mu \dot{\vec{r}}^2}{2} - U(\vec{r}) \quad \frac{d}{dt} \dot{\vec{R}} = 0, \quad \mu \ddot{\vec{r}} = - \frac{\partial U(\vec{r})}{\partial \vec{r}}$$

$$m_{\text{tot}} = m_1 + m_2$$



Um das Zwei-Körper-Problem verstehen zu können, muss man in der Lage sein die Bewegung eines Teilchens im externe Kraftfeld zu beschreiben.

3. Dreidimensionale Bewegung

Bewegung im Zentralfeld kann zum eindimensionalen Fall reduziert werden.

Der Drehimpuls ist erhalten. Bewegung passiert in der Ebene welche orthogonal zum Drehimpulsvektor ist.

$$L = \frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2} - U(r)$$

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = m\dot{\vec{r}}$$

$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{p}], \quad \vec{r} \cdot \vec{M} = 0, \quad \dot{\vec{r}} \cdot \vec{M} = \frac{\vec{p}}{m} \cdot \vec{M} = 0$$

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = 0$$

$$L = \frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right) - U(r)$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow L = \frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 \right) - U(r)$$

Zwei Bewegungsintegrale: die Energie und der Drehimpuls. Wir kombinieren beide um die effektive potentielle Energie des Teilchens zu konstruieren und das Problem "eindimensional" zu machen.

$$M = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2 \dot{\phi}$$

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{M^2}{2mr^2} + U(r) = \frac{m\dot{r}^2}{2} + U_{\text{eff}}(r), \quad U_{\text{eff}}(r) = \frac{M^2}{2mr^2} + U(r)$$

$$t - t_0 = \pm \int_r^{\bar{r}} \frac{d\bar{r}}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - U_{\text{eff}}(\bar{r}))}}$$

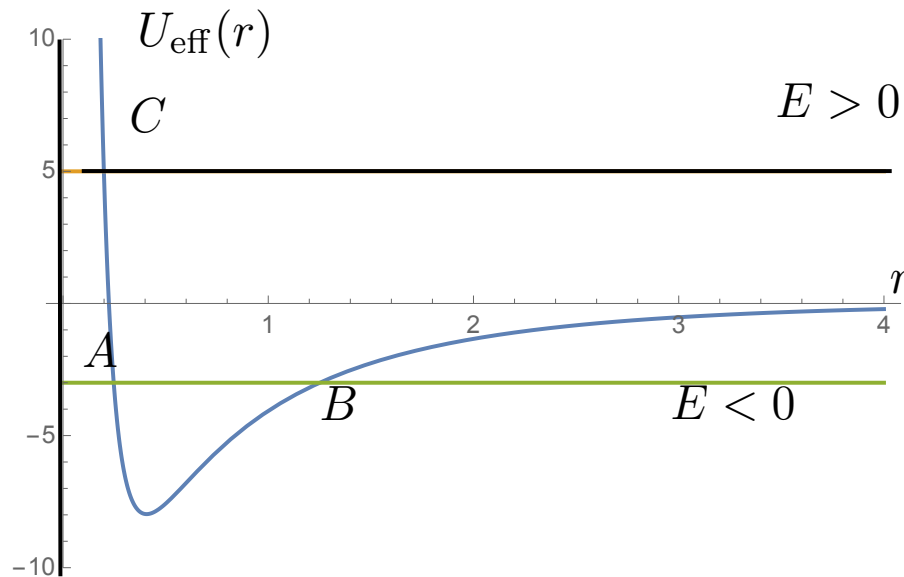
3. Dreidimensionale Bewegung

Die Radialbewegung kann man wie eine eindimensionale Bewegung betrachten.

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{M^2}{2mr^2} + U(r) = \frac{m\dot{r}^2}{2} + U_{\text{eff}}(r), \quad U_{\text{eff}}(r) = \frac{M^2}{2mr^2} + U(r)$$

$$t - t_0 = \pm \int \frac{d\bar{r}}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - U_{\text{eff}}(\bar{r}))}} \quad M = mr^2\dot{\phi}$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} U(r) \sim -\alpha r^{-n}$$



Falls $n > 2$ ist oder $M=0$ ist, kann das Teilchen auf das Zentrum fallen.

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} (E - U_{\text{eff}}(r))}, \quad \frac{d\phi}{dt} = \frac{M}{mr^2}$$

$$\frac{dr}{d\phi} = \frac{\sqrt{\frac{2}{m} (E - U_{\text{eff}}(r))}}{M/(mr^2)}$$

3. Dreidimensionale Bewegung

Es gibt verschiedene Trajektorien denen ein Teilchen in einem Zentralfeld folgen kann.

$$\frac{dr}{d\phi} = \frac{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{\text{eff}}(r))}}{M/(mr^2)}$$

$$\phi - \phi_0 = \int^r \frac{dr \frac{M}{mr^2}}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U_{\text{eff}}(r))}}$$

$$\Delta\phi = 2 \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr \frac{M}{mr^2}}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U_{\text{eff}}(r))}}$$

Eine Trajektorie ist geschlossen falls

$$\Delta\phi = 2\pi \frac{n_1}{n_2}, \quad n_{1,2} \text{ sind ganze Zahlen}$$

Nach n_2 Drehungen, schliesst sich die Bahn,

Es gibt nur zwei Potentiale, $U(r)=-1/r$ oder $U(r)=r^2$, in denen alle Trajektorien geschlossen sind.

