

Zusammenfassung

1. Die Bewegungsintegrale sind eng mit den Symmetrien der Wirkung verbunden. Was das genau bedeutet, zeigt das Noether-Theorem.

Noether-Theorem: Falls die Wirkung eines mechanischen Systems unter der folgenden infinitesimalen Transformationen invariant ist

$$q_i \rightarrow q'_i = q_i + \epsilon \Psi_i(\{q_j\}, t), \quad t \rightarrow t' = t + \epsilon X(\{q_j\}, t) \quad \epsilon \ll 1$$

ist die Grösse
$$I = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} [\Psi_i - X \dot{q}_i] + LX$$
 ein Bewegungsintegral.

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(\{q\}, \{dq/dt\}, t) = \int_{t'_1}^{t'_2} dt' L(\{q'\}, \{dq'/dt'\}, t'). \quad +\mathcal{O}(\epsilon^2)$$

2. Die Energieerhaltung. Homogenität der Zeit. Symmetrietransformation: Zeitverschiebung.

3. Die Impulserhaltung. Homogenität des Raumes. Symmetrietransformation: Koordinatenverschiebung.

4. Die Drehimpulserhaltung. Symmetrie: die Isotropie des Raumes. Symmetrietransformation: Drehungen.

2. Erhaltungssätze

Beispiele

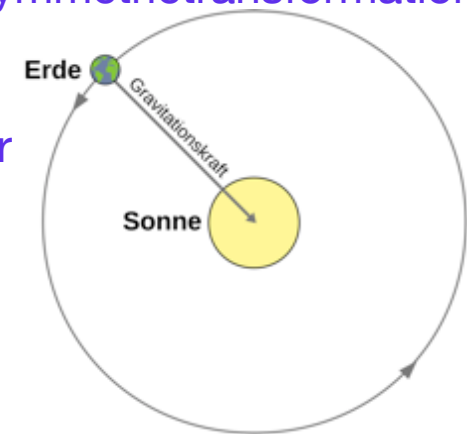
$$q_i \rightarrow q'_i = q_i + \epsilon \Psi_i(\{q_j\}, t), \quad t \rightarrow t' = t + \epsilon X(\{q_j\}, t)$$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(\{q\}, \{dq/dt\}, t) = \int_{t'_1}^{t'_2} dt' L(\{q'\}, \{dq'/dt'\}, t').$$

$$I = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} [\Psi_i - X \dot{q}_i] + LX$$

4. Die Isotropie des Raumes. Symmetrie: Rotationssymmetrie. Symmetrietransformation : Drehungen.

Die Erde im Gravitationsfeld der Sonne. Die potentielle Energie der Erde ist unabhängig von der Richtung des Ortsvektors und hängt nur von der Länge des Ortsvektors ab



$$L = \frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2} - \frac{GmM}{|\vec{r}|}$$

$$\vec{r} = r(\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r} \frac{\vec{r}}{r} + r\dot{\theta}(\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, -\sin \theta) + r\dot{\phi} \sin \theta(-\sin \phi, \cos \phi, 0)$$

$$= \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\phi} \sin \theta \vec{e}_\phi$$

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}, \quad i, j \in \{r, \theta, \phi\}$$

$$\vec{e}_r = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$$

$$\dot{\vec{r}}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2$$

$$\vec{e}_\theta = (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, -\sin \theta)$$

$$\vec{e}_\phi = (-\sin \phi, \cos \phi, 0)$$

$$L = \frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right) - \frac{GmM}{r}$$

2. Erhaltungssätze

Beispiele

$$q_i \rightarrow q'_i = q_i + \epsilon \Psi_i(\{q_j\}, t), \quad t \rightarrow t' = t + \epsilon X(\{q_j\}, t)$$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(\{q\}, \{dq/dt\}, t) = \int_{t'_1}^{t'_2} dt' L(\{q'\}, \{dq'/dt'\}, t').$$

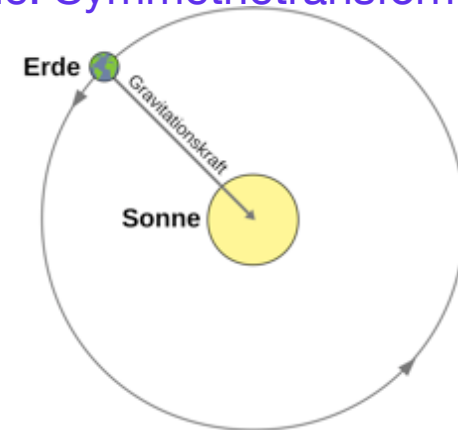
$$I = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} [\Psi_i - X \dot{q}_i] + LX$$

4. Die Isotropie des Raumes. Symmetrie: Rotationssymmetrie. Symmetrietransformation: Drehungen.

$$L = \frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right) - \frac{GmM}{r}$$

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi + \epsilon, \quad L(r, \theta, \phi) = L(r, \theta, \phi')$$

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}$$



Die Verschiebung des Azimutalwinkels entspricht einer Drehung um die z-Achse

$$\vec{r} = r(\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) \rightarrow \vec{r}' = r(\sin \theta \cos(\phi + \epsilon), \sin \theta \sin(\phi + \epsilon), \cos \theta)$$

$$\vec{r}' = \vec{r} + \delta \vec{r}, \quad \delta \vec{r} = \delta \phi [\vec{e}_z \times \vec{r}]$$

2. Erhaltungssätze

Beispiele

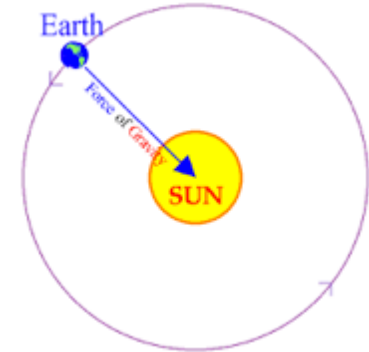
$$q_i \rightarrow q'_i = q_i + \epsilon \Psi_i(\{q_j\}, t), \quad t \rightarrow t' = t + \epsilon X(\{q_j\}, t)$$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(\{q\}, \{dq/dt\}, t) = \int_{t'_1}^{t'_2} dt' L(\{q'\}, \{dq'/dt'\}, t').$$

$$I = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} [\Psi_i - X \dot{q}_i] + LX$$

4. Die Isotropie des Raumes. Symmetrie: Rotationssymmetrie.
Symmetrietransformationen : Drehungen.

$$L = \frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2} - \frac{GmM}{|\vec{r}|}$$



Aber, wir können auch um eine **beliebige** Achse $\vec{n}$ drehen !

$$\vec{r}' = \vec{r} + \delta\vec{r}, \quad \delta\vec{r} = \delta\phi [\vec{e}_z \times \vec{r}] \rightarrow \delta\vec{r} = \delta\phi [\vec{n} \times \vec{r}]$$

$$\dot{\vec{r}}' = \dot{\vec{r}} + \delta\dot{\vec{r}}, \quad \delta\dot{\vec{r}} = \delta\phi [\vec{n} \times \dot{\vec{r}}] \quad \vec{r}^2 \rightarrow \vec{r}'^2, \quad \dot{\vec{r}} \rightarrow \dot{\vec{r}}', \quad L(\dot{\vec{r}}, \vec{r}, t) = L(\dot{\vec{r}}', \vec{r}', t)$$

$$\epsilon \Psi_i = \delta \vec{r}_i = \delta\phi [\vec{n} \times \vec{r}]_i = \delta\phi \epsilon_{ijk} n_j r_k \Rightarrow \Psi_i = \epsilon_{ijk} n_j r_k$$

$$I_n = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} \Psi_i = \sum_i m \dot{r}_i \epsilon_{ijk} n_j r_k = \vec{n} \cdot [\vec{r} \times \vec{p}]$$

$$\Psi_x = n_y r_z - n_z r_y$$

$$\Psi_y = n_z r_x - n_x r_z$$

$$\Psi_z = n_x r_y - n_y r_x$$

Weil der Vektor $\vec{n}$ beliebig ist, **bleibt der Drehimpulsvektor** $\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{p}]$ erhalten.

2. Erhaltungssätze

Beispiel: 5. Die Ähnlichkeitstransformation und das Virialtheorem

$$U(\lambda \vec{r}) = \lambda^n U(\vec{r})$$

$$\vec{r} \rightarrow \vec{r}' = \lambda \vec{r}, \quad t \rightarrow t' = \lambda^{(2-n)/2} t$$

$$L' = \frac{m}{2} \left(\frac{d\vec{r}'}{dt} \right)^2 - U(\vec{r}') = \lambda^n \left[\frac{m}{2} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)^2 - U(\vec{r}) \right] = \lambda^n L \quad S' = \lambda^{(2+n)/2} S$$

$$0 = S' - \lambda^{(2+n)/2} S \quad \lambda = 1 + \epsilon \quad \vec{\Psi} = \vec{r}, \quad X = \frac{(2-n)}{2} t$$

$$0 = \int dt \left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} \vec{\Psi} - EX \right] - \frac{(2+n)}{2} L \right\} = \int dt \left\{ \frac{d}{dt} \left[m \dot{\vec{r}} \cdot \vec{r} - E \frac{(2-n)}{2} t \right] - \frac{(2+n)}{2} L \right\}$$

Um diese Grösse zu interpretieren, ist es nützlich das Integral über einem unendlich grossen Zeitraum zu mitteln. Für finite Bewegungen verschwindet der erste Term.

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt \frac{d}{dt} [m \dot{\vec{r}} \cdot \vec{r}] = 0 \quad \frac{(2-n)}{2} E = -\frac{(2+n)}{2} \langle L \rangle, \quad \langle L \rangle = \langle T \rangle - \langle U \rangle, \quad E = \langle T \rangle + \langle U \rangle$$

$$\langle T \rangle = \frac{n}{2} \langle U \rangle$$

2. Erhaltungssätze

Beispiel: 5. Mehr zu Ähnlichkeitstransformationen

$$U(\lambda \vec{r}_1, \lambda \vec{r}_2, \dots, \lambda \vec{r}_N) = \lambda^N U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) \quad \vec{r}_i \rightarrow \vec{r}' = \lambda \vec{r}, \quad t \rightarrow t' = \beta t$$

$$L' = \sum_{i=1}^M \frac{m}{2} \left(\frac{d\vec{r}'_i}{dt'} \right)^2 - U(\vec{r}'_1, \vec{r}'_2, \dots, \vec{r}'_N) = \frac{\lambda^2}{\beta^2} \sum_{i=1}^M \frac{m}{2} \left(\frac{d\vec{r}_i}{dt} \right)^2 - \lambda^N U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N)$$

$$\frac{\lambda^2}{\beta^2} = \lambda^N \quad \Rightarrow \quad \beta = \lambda^{1-N/2}$$

$$L' = \lambda^N L$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} = \frac{\partial L}{\partial r_i}$$

Falls zwei Lagrangefunktionen proportional zueinander sind, sind die zugehörigen Bewegungsgleichungen identisch.

D.h. falls $\vec{r}(t)$ die Lösung der Bewegungsgleichungen ist, ist $\vec{r}'(t) = \frac{1}{\lambda} \vec{r}(\beta t)$ auch die Lösung.

$$\begin{aligned} m \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}'(t) &= \frac{1}{\lambda} m \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}(\beta t) = \frac{\beta^2}{\lambda} m \frac{d^2}{d(\beta t)^2} \vec{r}(\beta t) = \frac{\beta^2}{\lambda} m \frac{d^2 \vec{r}}{d\xi^2} \Big|_{\xi=\beta t} \\ &= -\frac{\beta^2}{\lambda} \frac{\partial U(\vec{r})}{\partial \vec{r}} = -\frac{\beta^2}{\lambda} \frac{1}{\lambda} \frac{\partial U(\lambda \vec{r}')}{\partial \vec{r}'} = -\beta^2 \lambda^{N-2} \frac{\partial U(\vec{r}')}{\partial \vec{r}'} = -\frac{\partial U(\vec{r}')}{\partial \vec{r}'} \end{aligned}$$

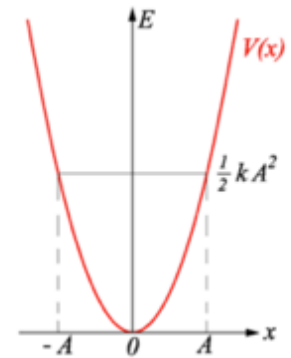
2. Erhaltungssätze

$$U(\lambda \vec{r}_1, \lambda \vec{r}_2, \dots, \lambda \vec{r}_N) = \lambda^N U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) \quad \vec{r}_i \rightarrow \vec{r}' = \lambda \vec{r}, \quad t \rightarrow t' = \beta t \quad \lambda^{n-2} \beta^2 = 1$$

L_1 und L_2 sind die Abmessungen und T_1 und T_2 die Umlaufzeiten der zwei Bahnen. Falls die Abmessungen sich um ein Faktor unterscheiden, soll die Umlaufzeiten auch eine Relation haben.

$$(L_1, T_1) \quad (L_2 = \lambda L_1, \quad T_2 = \beta T_1)$$

$$\frac{L_2}{L_1} = \lambda, \quad \frac{T_2}{T_1} = \beta \quad \Rightarrow \quad \frac{T_2}{T_1} = \beta = \lambda^{1-n/2} = \left(\frac{L_2}{L_1} \right)^{1-n/2}$$

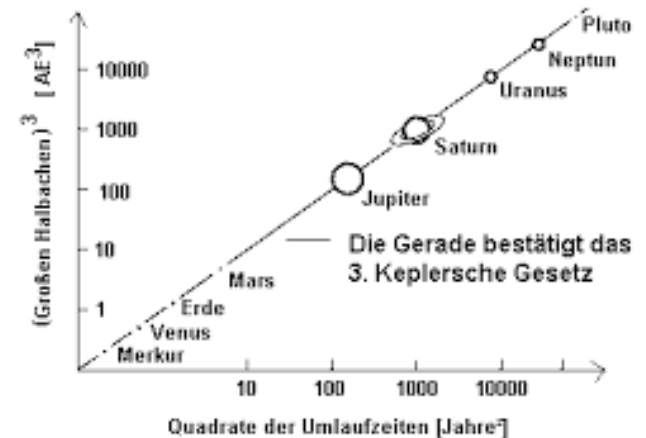


a) Harmonischer Oszillator: Die Periode der Schwingungen ist unabhängig von der Amplitude der Schwingungen.

$$U(\vec{r}) = \frac{m\omega^2 \vec{r}^2}{2} \quad \Rightarrow \quad n = 2 \quad \frac{T_2}{T_1} = 1$$

b) Die Grösse der Orbits und die Umlaufzeiten (Keplersche drittes Gesetz)

$$U(\vec{r}) = \frac{GmM}{r} \quad \Rightarrow \quad n = -1, \quad \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{L_2}{L_1} \right)^{3/2}$$



3. Eindimensionale Bewegung

Im Fall einer eindimensionalen Bewegung kann man die Bewegungsgleichungen immer integrieren und die Zeitabhängigkeit der Bahn indirekt bestimmen, falls die Lagrangefunktion selbst zeitunabhängig ist.

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x)$$

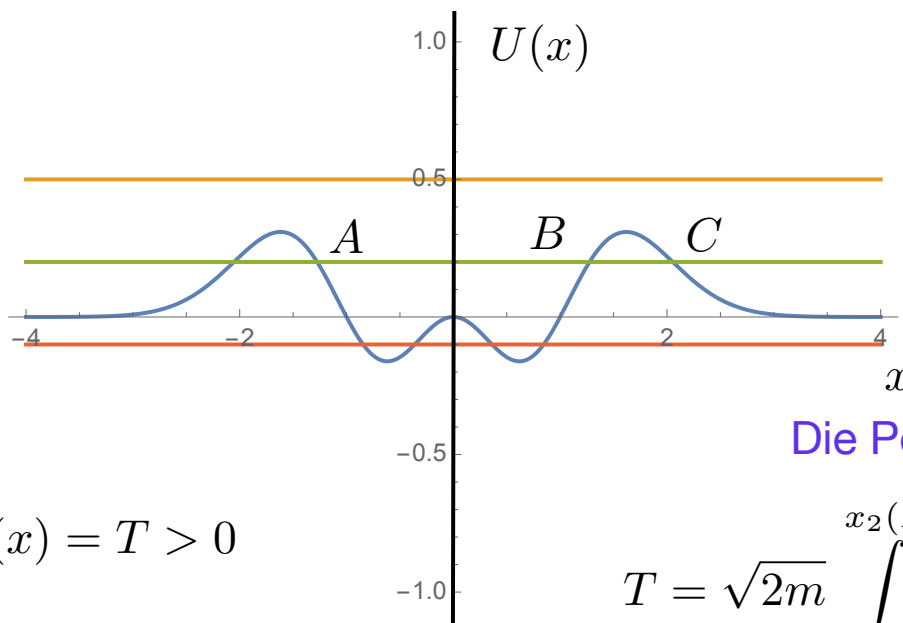
$$E = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{x} - L = \frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x)$$

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2(E - U(x))}{m}}$$

$$\sqrt{\frac{m}{2}} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} = dt$$

$$\sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{d\xi}{\sqrt{E - U(\xi)}} = t - t_0$$

Die Randbedingungen: E, t_0



Die Periode der Schwingungen

$$E - U(x) = T > 0$$

$$T = \sqrt{2m} \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}, \quad E - U(x_{1,2}) = 0$$