

Zusammenfassung

- 1) Falls **Zwangsbedingungen** die Freiheitsgrade einschränken, kann man die abhängige Koordinaten aus der Lagrangfunktion eliminieren;
- 2) Es ist auch möglich die Zwangsbedingungen **mit Hilfe der Lagrange faktoren zu berücksichtigen.**

$$f(q_1, q_2, \dots, q_N, t) = 0 \quad \text{z.B.} \quad x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

$$L \rightarrow L' = L + \lambda f(q_1, \dots, q_N, t)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L'}{\partial q_i} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{\lambda}} = \frac{\partial L'}{\partial \lambda} \Rightarrow 0 = f(q_1, \dots, q_N, t)$$

- 3) Zeitunabhängige Funktionen von Koordinaten und Geschwindigkeiten des Systems und auch von der Zeit, heissen **Bewegungsintegrale**. **Die Bewegungsintegrale sind sehr interessant weil sie uns helfen können die Bewegungsgleichungen zu lösen.**

Wir kann man die Bewegungsintegrale systematisch bestimmen?

$$I \equiv I(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}, t) \Leftrightarrow \frac{dI}{dt} = 0$$

2. Erhaltungssätze

Die Bewegungsintegrale sind eng mit den Symmetrien der Wirkung verbunden. Was das genau bedeutet, zeigt das Noether-Theorem.

Noether-Theorem: Wir betrachten ein mechanisches System, dessen Wirkung invariant unter der folgenden infinitesimalen Transformationen ist

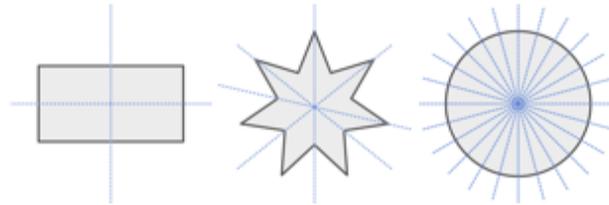
$$q_i \rightarrow q'_i = q_i + \epsilon \Psi_i(\{q_j\}, t), \quad t \rightarrow t' = t + \epsilon X(\{q_j\}, t) \quad \epsilon \ll 1$$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(\{q\}, \{dq/dt\}, t) = \int_{t'_1}^{t'_2} dt' L(\{q'\}, \{dq'/dt'\}, t') + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

Dann ist die Grösse $I = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} [\Psi_i - X \dot{q}_i] + LX$ erhalten (d.h. zeitunabhängig)

Symmetrien

Jeder weiss was eine Symmetrie bedeutet (Spiegelsymmetrie, Drehsymmetrie u.s.w.)



Es gibt auch die Symmetrien in Gleichungen. Z.b:

$$U(z, y, z) = \frac{\alpha}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\begin{aligned}x &= \cos \theta x' + \sin \theta y' \\y &= -\sin \theta y' + \cos \theta x' \\z &= z'\end{aligned}$$

$$U(x', y', z') = \frac{\alpha}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}$$

$$E^2 - p^2 = m^2$$

$$\begin{aligned}E &= \cosh \theta E' + \sinh \theta' p' \\p &= \sinh \theta p' + \cosh \theta' E'\end{aligned}$$

$$E'^2 - p'^2 = m^2$$

$$U(x, y, z) = x$$

$$\begin{aligned}x &= \cos \theta x' + \sin \theta y' \\y &= -\sin \theta y' + \cos \theta x' \\z &= z'\end{aligned}$$

$$\underline{\underline{\tilde{U}(x', y', z') = \cos \theta x' + \sin \theta y'}}$$

Symmetrien

Symmetrien in den Gleichungen bedeuten, dass bestimmte physikalische Größen erhalten sind. D.h. dass Symmetrien ein wichtiger Bestandteil von physikalischen Theorien sind.

- Warum folgen freie Teilchen einer Geraden?
- Warum -- wenn Planeten sich bewegen -- sind die Orbits (fast) geschlossen?
- Warum ist die elektrische Ladung erhalten?
- Warum haben Photonen keine Masse?
- Warum gibt keine Zerfälle von Muonen zu Elektronen?
- Warum sind die Gravitationsmasse und die Bewegungsmasse gleich?

2. Erhaltungssätze

Wir wollen die "neue" Wirkung mit Hilfe der "alten" Koordinaten ausdrücken

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(\{q\}, \{dq/dt\}, t) = \int_{t'_1}^{t'_2} dt' L(\{q'\}, \{dq'/dt'\}, t').$$

$$q_i \rightarrow q'_i = q_i + \epsilon \Psi_i(\{q_j\}, t), \quad t \rightarrow t' = t + \epsilon X(\{q_j\}, t)$$

$$dt' = dt \left(1 + \epsilon \frac{dX}{dt} \right) \quad \frac{dq'_i}{dt'} = \frac{d(q_i + \epsilon \Psi_i)}{dt \left(1 + \epsilon \frac{dX}{dt} \right)} = \dot{q}_i + \epsilon \left[\frac{d\Psi_i}{dt} - \frac{dX}{dt} \dot{q}_i \right] + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

$$L(\{q'\}, \{dq'/dt'\}, t') \approx L(\{q\}, \{\dot{q}\}, t) + \epsilon X \frac{\partial L}{\partial t} + \epsilon \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \Psi_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d\Psi_i}{dt} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{dX}{dt} \dot{q}_i \right] + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

$$S' = \int_{t'_1}^{t'_2} dt' L(\{q'\}, \{dq'/dt'\}, t') = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(1 + \epsilon \frac{dX}{dt} \right) L(\{q'\}, \{dq'/dt'\}, t')$$

$$0 = S' - S = \epsilon \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \frac{dX}{dt} L + \frac{\partial L}{\partial t} X + \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \Psi_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{d\Psi_i}{dt} - \frac{dX}{dt} \dot{q}_i \right) \right] \right\} + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

2. Erhaltungssätze

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \frac{dX}{dt} L + \frac{\partial L}{\partial t} X + \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \Psi_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{d\Psi_i}{dt} - \frac{dX}{dt} \dot{q}_i \right) \right] \right\}$$

Um das Bewegungsintegral zu extrahieren müssen wir in der obigen Formel die totale Zeitableitung identifizieren. **Dieser Schritt gilt nur für Bahnen, welche die Euler-Lagrange Gleichungen erfüllen.**

$$a) \quad \frac{\partial L}{\partial q_i} \Psi_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d\Psi_i}{dt} \stackrel{\text{BG}}{=} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] \Psi_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d\Psi_i}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \Psi_i \right]$$

$$b) \quad \frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \stackrel{\text{BG}}{=} \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_i \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i$$

$$c) \quad \frac{dX}{dt} L + \frac{\partial L}{\partial t} X - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \left[\frac{dX}{dt} \dot{q}_i \right] = \frac{d}{dt} [LX] - X \frac{dL}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t} X - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \left[\frac{dX}{dt} \dot{q}_i \right]$$

$$= \frac{d}{dt} [LX] - \sum_i \left[\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] \dot{q}_i X + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i X + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \frac{dX}{dt} \right] = \frac{d}{dt} \left[LX - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i X \right]$$

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} \left[\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \Psi_i + LX - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i X \right] \Rightarrow I = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} [\Psi_i - X \dot{q}_i] + LX = \text{const}$$

2. Erhaltungssätze

Beispiele

$$q_i \rightarrow q'_i = q_i + \epsilon \Psi_i(\{q_j\}, t), \quad t \rightarrow t' = t + \epsilon X(\{q_j\}, t)$$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(\{q\}, \{dq/dt\}, t) = \int_{t'_1}^{t'_2} dt' L(\{q'\}, \{dq'/dt'\}, t').$$

$$I = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} [\Psi_i - X \dot{q}_i] + LX$$

1. Zeitunabhängigkeit der Lagrangefunktion. Symmetrie: Homogenität der Zeit.
Symmetrietransformation: Zeitverschiebung

$$L = L(q_1, q_2, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_N) \quad q_i \rightarrow q'_i = q_i, \quad t \rightarrow t' = t + \epsilon, \quad \Rightarrow \quad \Psi_i = 0, X = 1$$

Die Energie ist erhalten

$$E = \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \quad \frac{dE}{dt} = 0$$

2. Unabhängigkeit der Lagrangefunktion von einer Koordinate (man nennt diese Koordinate **zyklisch**). Symmetrie: Homogenität des Raumes. Symmetrietransformation: Koordinatenverschiebung

$$L = L(q_2, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_N, t)$$

$$q_1 \rightarrow q'_1 = q_1 + \epsilon, q_{i \neq 1} \rightarrow q'_i = q_i, \quad t \rightarrow t' = t, \quad \Rightarrow \quad \Psi_1 = 1, \quad \Psi_{i \neq 1} = 0, \quad X = 0.$$

Der entsprechende Impuls ist erhalten.

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \quad \frac{dp_1}{dt} = 0$$

2. Erhaltungssätze

Beispiele

$$q_i \rightarrow q'_i = q_i + \epsilon \Psi_i(\{q_j\}, t), \quad t \rightarrow t' = t + \epsilon X(\{q_j\}, t)$$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(\{q\}, \{dq/dt\}, t) = \int_{t'_1}^{t'_2} dt' L(\{q'\}, \{dq'/dt'\}, t').$$

$$I = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} [\Psi_i - X \dot{q}_i] + LX$$

3. Geschlossene Systeme. Symmetrietransformation: Verschiebung des Koordinatenursprung.

$$L = \sum_{i=1}^N \frac{m_i \dot{\vec{r}}_i^2}{2} - \sum_{ij} U_{ij}(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$$

$$\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}'_i = \vec{r}_i + \vec{\epsilon}, \quad \vec{t}' = \vec{t}, \quad \Psi_i^j = 1.$$

Der Gesamtimpuls des Systems ist erhalten

$$\vec{P}_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \quad \frac{d}{dt} \vec{P}_{\text{tot}} = 0$$

Die Folge: Der Schwerpunkt eines geschlossenen Systems bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit.

$$\vec{R} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} \quad \frac{d}{dt} \vec{R} = \frac{\sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{\vec{P}_{\text{tot}}}{M_{\text{tot}}} = \vec{V}$$

2. Erhaltungssätze

Beispiele

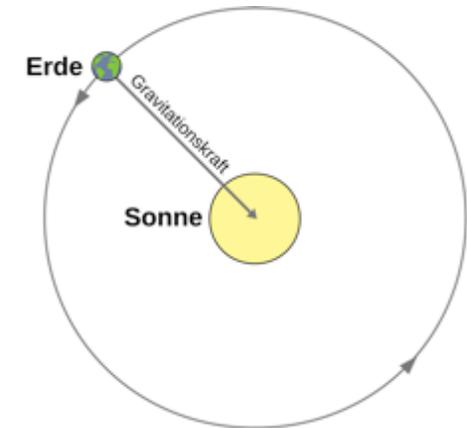
$$q_i \rightarrow q'_i = q_i + \epsilon \Psi_i(\{q_j\}, t), \quad t \rightarrow t' = t + \epsilon X(\{q_j\}, t)$$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(\{q\}, \{dq/dt\}, t) = \int_{t'_1}^{t'_2} dt' L(\{q'\}, \{dq'/dt'\}, t').$$

$$I = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} [\Psi_i - X \dot{q}_i] + LX$$

4. Die Isotropie des Raumes. Symmetrie: Rotationssymmetrie. Symmetrietransformationen : Drehungen.

Die Erde im Gravitationsfeld der Sonne. Die potentielle Energie der Erde ist unabhängig von der Richtung des Ortsvektors und hängt nur von der Länge des Ortsvektors ab



$$L = \frac{m\dot{r}^2}{2} - \frac{GmM}{|\vec{r}|}$$

$$\vec{r} = r(\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r} \frac{\vec{r}}{r} + r\dot{\theta}(\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, -\sin \theta) + r\dot{\phi}(-\sin \theta \sin \phi, \cos \theta \cos \phi, 0) \Rightarrow$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\phi}\vec{e}_\phi$$

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}, \quad i, j \in \{r, \theta, \phi\}$$

$$\vec{e}_r = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$$

$$\dot{\vec{r}}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2$$

$$\vec{e}_\theta = (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, -\sin \theta)$$

$$\vec{e}_\phi = (-\sin \theta \sin \phi, \cos \theta \cos \phi, 0)$$

$$L = \frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right) - \frac{GmM}{r}$$

2. Erhaltungssätze

Beispiele

$$q_i \rightarrow q'_i = q_i + \epsilon \Psi_i(\{q_j\}, t), \quad t \rightarrow t' = t + \epsilon X(\{q_j\}, t)$$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(\{q\}, \{dq/dt\}, t) = \int_{t'_1}^{t'_2} dt' L(\{q'\}, \{dq'/dt'\}, t').$$

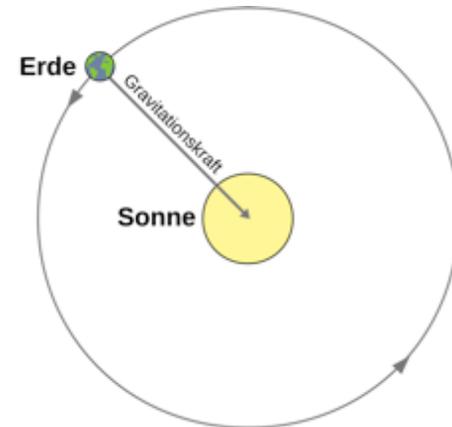
$$I = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} [\Psi_i - X \dot{q}_i] + LX$$

4. Die Isotropie des Raumes. Symmetrie: Rotationssymmetrie.
Symmetrietransformationen : Drehungen.

$$L = \frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right) - \frac{GmM}{r}$$

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi + \epsilon, \quad L(r, \theta, \phi) = L(r, \theta, \phi')$$

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}$$



Die Verschiebung des Azimutalwinkels entspricht einer Drehung um die z-Achse

$$\vec{r} = r(\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) \rightarrow \vec{r}' = r(\sin \theta \cos(\phi + \epsilon), \sin \theta \sin(\phi + \epsilon), \cos \theta)$$

$$\vec{r}' = \vec{r} + \delta \vec{r}, \quad \delta \vec{r} = \delta \phi [\vec{e}_z \times \vec{r}]$$

2. Erhaltungssätze

Beispiele

$$q_i \rightarrow q'_i = q_i + \epsilon \Psi_i(\{q_j\}, t), \quad t \rightarrow t' = t + \epsilon X(\{q_j\}, t)$$

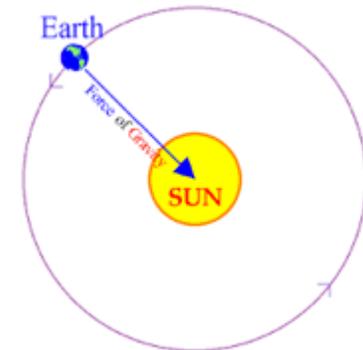
$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(\{q\}, \{dq/dt\}, t) = \int_{t'_1}^{t'_2} dt' L(\{q'\}, \{dq'/dt'\}, t').$$

$$I = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} [\Psi_i - X \dot{q}_i] + LX$$

4. Die Isotropie des Raumes. Symmetrie: Rotationssymmetrie.
Symmetrietransformationen : Drehungen.

$$L = \frac{m\dot{r}^2}{2} - \frac{GmM}{|\vec{r}|}$$

Aber, wir können auch um eine **beliebige** Achsen drehen !



$$\vec{r}' = \vec{r} + \delta\vec{r}, \quad \delta\vec{r} = \delta\phi [\vec{e}_z \times \vec{r}] \quad \rightarrow \quad \delta\vec{r} = \delta\phi [\vec{n} \times \vec{r}]$$

$$\dot{\vec{r}}' = \dot{\vec{r}} + \delta\dot{\vec{r}}, \quad \delta\dot{\vec{r}} = \delta\phi [\vec{n} \times \dot{\vec{r}}]$$

$$\vec{r}^2 \rightarrow \vec{r}'^2, \quad \dot{\vec{r}} \rightarrow \dot{\vec{r}}', \quad L(\dot{\vec{r}}, \vec{r}, t) = L(\dot{\vec{r}}', \vec{r}', t)$$

$$\Psi_i = \epsilon_{ijk} n_j r_k \quad \rightarrow \quad \mathcal{M}_n = \sum \frac{\partial L}{\partial r_i} \Psi_i = \vec{n} \cdot [\vec{r} \times \vec{p}]$$

Der Drehimpuls ist erhalten.

$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{p}]$$

2. Erhaltungssätze

Beispiele: 5. Die Ähnlichkeitstransformation und das Virialtheorem

$$U(\lambda\vec{r}) = \lambda^n U(\vec{r})$$

$$\vec{r} \rightarrow \vec{r}' = \lambda\vec{r}, \quad t \rightarrow t' = \lambda^{(2-n)/2}t$$

$$L' = \frac{m}{2} \left(\frac{d\vec{r}'}{dt} \right)^2 - U(\vec{r}') = \lambda^n \left[\frac{m}{2} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)^2 - U(\vec{r}') \right] = \lambda^n L \quad S' = \lambda^{(2+n)/2} S$$

$$0 = S' - \lambda^{(2+n)/2} S \quad \lambda = 1 + \epsilon \quad \vec{\Psi} = \vec{r}, \quad X = \frac{(2-n)}{2} t$$

$$0 = \int dt \left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} \vec{\Psi} - EX \right] - \frac{(2+n)}{2} L \right\} = \int dt \left\{ \frac{d}{dt} \left[m\dot{\vec{r}} \cdot \vec{r} - E \frac{(2-n)}{2} t \right] - \frac{(2+n)}{2} L \right\}$$

Um diese Grösse zu interpretieren, ist es nützlich das Integral über einen unendlich grossen Zeitraum zu mitteln. Für finite Bewegungen, verschwindet der erste Term

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt \frac{d}{dt} [m\dot{\vec{r}} \cdot \vec{r}] = 0 \quad \frac{(2-n)}{2} E = -\frac{(2+n)}{2} \langle L \rangle, \quad \langle L \rangle = \langle T \rangle - \langle U \rangle, \quad E = \langle T \rangle + \langle U \rangle$$

$$\langle T \rangle = \frac{n}{2} \langle U \rangle$$