Zusammenfassung

1) Falls Zwangsbedinungen die Freiheitsgrade abhängig machen, kann man die abhängige Koordinaten aus der Lagrangfunktion extrahieren;

2) Es ist auch möglich die Zwangsbedinungen mit Hilfe der Lagrangefaktoren zu berücksichtigen.

$$f(q_1, q_2, \dots q_N, t) = 0 \qquad \text{z.B.} \qquad x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

$$L \to L' = L + \lambda f(q_1, \dots, q_N, t)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L'}{\partial q_i} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L'}{\partial \dot{\lambda}} = \frac{\partial L'}{\partial \lambda} \quad \Rightarrow \quad 0 = f(q_1, \dots q_N, t)$$

3) Zeitunabhängige Funktionen von Koordinaten und Geschwindigkeiten des Systems und auch von der Zeit, heissen Bewegungsintegrale. Die Bewegungsintegrale sind sehr interessant weil die uns helfen können die Bewegungsgleichungen zu lösen.

Wir kann man die Bewegungsintegrale systematisch bestimmen?

$$I \equiv I(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}, t) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = 0$$

2. Erhaltungssätze

Die Bewegungsintegrale sind eng mit den Symmetrien der Wirkung verbunden. Was das genau bedeutet, zeigt das Noether-Theorem.

Noether-Theorem: Wir betrachten ein mechanischen System, dessen Wirkung invariant unter der folgende infinitesimale Transformationen ist

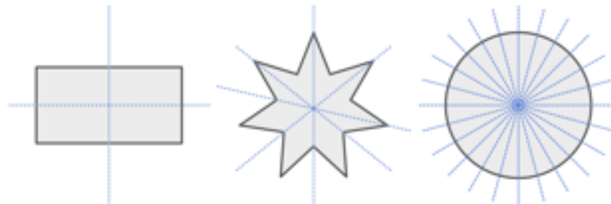
$$q_i \to q_i' = q_i + \epsilon \Psi_i(\{q_j\}, t), \qquad t \to t' = t + \epsilon X(\{q_j\}, t) \qquad \epsilon \ll 1$$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\ L(\{q\}, \{\mathrm{d}q/\mathrm{d}t\}, t) = \int_{t_1'}^{t_2'} \mathrm{d}t'\ L(\{q'\}, \{\mathrm{d}q'/\mathrm{d}t'\}, t'). + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

Dann ist die Grösse $$I = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} [\Psi_i - X\dot{q}_i] + LX$$ erhalten (d.h. zeitunabhängig)

Symmetrien

Jeder weiss was eine Symmetrie bedeutet (Spiegelsymmetrie, Drehsymmetire u.s.w.)



Es gibt auch die Symmetrie der Gleichungen. Z.b:

$$U(z,y,z) = \frac{\alpha}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\begin{aligned} x &= \cos\theta x' + \sin\theta y' \\ y &= -\sin\theta y' + \cos\theta x' \\ z &= z' \end{aligned}$$

$$U(x',y',z') = \frac{\alpha}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}$$

$$E^2 - p^2 = m^2$$

$$\begin{aligned} E &= \cosh\theta\ E' + \sinh\theta'\ p' \\ p &= \sinh\theta\ p' + \cosh\theta'\ E' \end{aligned}$$

$$E'^2 - p'^2 = m^2$$

$$U(x,y,z) = x$$

$$\begin{aligned} x &= \cos\theta x' + \sin\theta y' \\ y &= -\sin\theta y' + \cos\theta x' \\ z &= z' \end{aligned}$$

$$\underline{\tilde{U}(x',y',z') = \cos\theta x' + \sin\theta y'}$$

Symmetrien

Die Symmetrie der Gleichungen bedeutet das bestimmte physikalischen Grössen erhälten blleiben. D.h. das Symmetrien eine wichtige Bestandteil der physikalichen Theorien sind.

- Warum folgen freie Teilchen eine Gerade?

- Warum -- wenn Planeten sich Bewegen -- sind die Orbits (fast) geschlossen?

- Warum ist die elektrischen Ladung erhälten?

- Warum haben die Photonen keine Masse?

- Warum gibt keine Zerfalle von Muonen zu Elektronen?

- Warum sind die Gravitationsmasse und die Bewegunsmasse gleich?

2.Erhaltungssätze

Wir wollen die ``neue” Wirkung mit Hilfe der ``alten” Koordinaten ausdrücken

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \; L(\{q\},\{\mathrm{d}q/\mathrm{d}t\},t) = \int_{t_1'}^{t_2'} \mathrm{d}t' \; L(\{q'\},\{\mathrm{d}q'/\mathrm{d}t'\},t').$$

$$q_i \to q_i' = q_i + \epsilon \Psi_i(\{q_j\},t), \qquad t \to t' = t + \epsilon X(\{q_j\},t)$$

$$\mathrm{d}t' = \mathrm{d}t \left(1 + \epsilon \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}\right) \qquad \frac{\mathrm{d}q_i'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}(q_i + \epsilon\Psi_i)}{\mathrm{d}t\;\left(1+\epsilon\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}\right)} = \dot{q}_i + \epsilon\left[\frac{\mathrm{d}\Psi_i}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}\dot{q}_i\right] + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

$$L(\{q'\},\{\mathrm{d}q'/\mathrm{d}t'\},t') \approx L(\{q\},\{\dot{q}\},t) + \epsilon X\frac{\partial L}{\partial t} + \epsilon\sum_i\left[\frac{\partial L}{\partial q_i}\Psi_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\mathrm{d}\Psi_i}{\mathrm{d}t} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}\dot{q}_i\right] + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

$$S' = \int_{t_1'}^{t_2'} \mathrm{d}t' \; L(\{q'\},\{\mathrm{d}q'/\mathrm{d}t'\},t') = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \; \left(1+\epsilon\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}\right) L(\{q'\},\{\mathrm{d}q'/\mathrm{d}t'\},t')$$

$$\boxed{0 = S' - S = \epsilon \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left\{\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}L + \frac{\partial L}{\partial t}X + \sum_i\left[\frac{\partial L}{\partial q_i}\Psi_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{\mathrm{d}\Psi_i}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}\dot{q}_i\right)\right]\right\} + \mathcal{O}(\epsilon^2)}$$

2. Erhaltungssätze

$$\boxed{0 = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left\{ \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} L + \frac{\partial L}{\partial t} X + \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \Psi_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{\mathrm{d}\Psi_i}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} \dot{q}_i \right) \right] \right\}}$$

Um das Bewegungsintegral zu extrahieren, mussen wir die totale Zeitableitung in der obigen Formel identifizieren. Dieser Schritt gilt nur für Bahnen, die die Euler-Lagrange Gleichungen erfüllen.

a) $$\frac{\partial L}{\partial q_i} \Psi_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\mathrm{d}\Psi_i}{\mathrm{d}t} \overset{\mathrm{BG}}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] \Psi_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\mathrm{d}\Psi_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \Psi_i \right]$$

b) $$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \overset{\mathrm{BG}}{=} \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i$$

c) $$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} L + \frac{\partial L}{\partial t} X - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \left[\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} \dot{q}_i \right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} [LX] - X \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial L}{\partial t} X - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \left[\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} \dot{q}_i \right]$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} [LX] - \sum_i \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] \dot{q}_i X + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i X + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} \right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[LX - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i X \right]$$

$$\boxed{0 = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[\sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \Psi_i + LX - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i X \right] \quad \Rightarrow \quad I = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} [\Psi_i - X \dot{q}_i] + LX = \mathrm{const}}$$

2.Erhaltungssätze

Beispiele $$q_i \to q_i' = q_i + \epsilon \Psi_i(\{q_j\}, t), \qquad t \to t' = t + \epsilon X(\{q_j\}, t)$$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\ L(\{q\}, \{\mathrm{d}q/\mathrm{d}t\}, t) = \int_{t_1'}^{t_2'} \mathrm{d}t'\ L(\{q'\}, \{\mathrm{d}q'/\mathrm{d}t'\}, t').$$

$$\boxed{I = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \left[\Psi_i - X \dot{q}_i\right] + LX}$$

---

1. Zeitunabhangigkeit der Lagrangefunktion. Symmetrie: Homogenität der Zeit.
Symmetrietransformation: Zeitverschiebung

$$L = L(q_1, q_2, \ldots, q_N, \dot{q_1}, \dot{q_2}, .., \dot{q_N}) \qquad q_i \to q_i' = q_i, \quad t \to t' = t + \epsilon, \quad \Rightarrow \quad \Psi_i = 0, X = 1$$

Die Energie ist erhalten $$E = \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \qquad \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0$$

2. Unabhängigkeit der Lagrangefunktion von einer Koordinate (man nennt diese Koordinate zyklisch) . Symmetrie: Homogenität des Raumes.
Symmetrietransformation: Koordinatenverschiebung.

$$L = L(q_2, \ldots, q_N, \dot{q_1}, \dot{q_2}, .., \dot{q_N}, t)$$

$$q_1 \to q_1' = q_1 + \epsilon, q_{i \neq 1} \to q_i' = q_i, \quad t \to t' = t, \quad \Rightarrow \quad \Psi_1 = 1, \quad \Psi_{i \neq 1} = 0, \ X = 0.$$

Der ensprechenden Impuls ist erhaltend $$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q_1}} \qquad \frac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}t} = 0$$

2.Erhaltungssätze

Beispiele $$q_i \to q_i' = q_i + \epsilon \Psi_i(\{q_j\}, t), \qquad t \to t' = t + \epsilon X(\{q_j\}, t)$$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \; L(\{q\}, \{\mathrm{d}q/\mathrm{d}t\}, t) = \int_{t_1'}^{t_2'} \mathrm{d}t' \; L(\{q'\}, \{\mathrm{d}q'/\mathrm{d}t'\}, t').$$

$$\boxed{I = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \left[\Psi_i - X \dot{q}_i\right] + LX}$$

3. Geschlossene Systeme. Symmetrietransformation: Verschiebung des Koordinatenursprung.

$$L = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2}}{2} - \sum_{ij} U_{ij}(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \qquad \vec{r}_i \to \vec{r}_i' = \vec{r}_i + \vec{\epsilon}, \quad \vec{t}' = \vec{t}, \quad \Psi_i^j = 1.$$

Der Gesamtimpuls des Systems ist erhalten

$$\vec{P}_{\mathrm{tot}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} = \sum_i^N m_i \dot{\vec{r}}_i \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \vec{P}_{\mathrm{tot}} = 0$$

Die Folge: Der Schwerpunkt eines geschlossenen Systems bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit

$$\vec{R} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \vec{R} = \frac{\sum_i^N m_i \dot{\vec{r}}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \frac{\vec{P}_{\mathrm{tot}}}{M_{\mathrm{tot}}} = \vec{V}$$

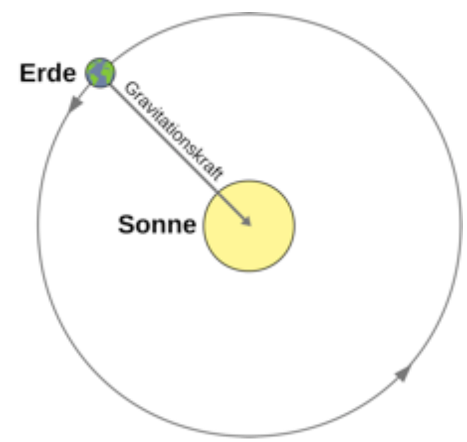
2.Erhaltungssätze

Beispiele $$q_i \to q_i' = q_i + \epsilon \Psi_i(\{q_j\}, t), \qquad t \to t' = t + \epsilon X(\{q_j\}, t)$$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \; L(\{q\}, \{\mathrm{d}q/\mathrm{d}t\}, t) = \int_{t_1'}^{t_2'} \mathrm{d}t' \; L(\{q'\}, \{\mathrm{d}q'/\mathrm{d}t'\}, t').$$

$$\boxed{I = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \left[\Psi_i - X \dot{q}_i\right] + LX}$$

4. Die Isotropie des Raumes. Symmetrie: Rotationssymmetrie.
Symmetrietransformationen : Drehungen.



Die Erde im Gravitationsfeld der Sonne. Die potentielle Energie der Erde ist unabhängig von der Richtung des Ortsvektors.

$$L = \frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2} - \frac{GmM}{|\vec{r}|}$$

$$\vec{r} = r(\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\frac{\vec{r}}{r} + r\dot{\theta}(\cos\theta\cos\phi, \cos\theta\sin\phi, -\sin\theta) + r\dot{\phi}(-\sin\theta\sin\phi, \cos\theta\cos\phi, 0) \Rightarrow$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\phi}\vec{e}_\phi$$

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}, \quad i, i \in \{r, \theta, \phi\}$$

$$\vec{e}_r = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$$
$$\vec{e}_\theta = (\cos\theta\cos\phi, \cos\theta\sin\phi, -\sin\theta)$$
$$\vec{e}_\phi = (-\sin\theta\sin\phi, \cos\theta\cos\phi, 0)$$

$$\dot{\vec{r}}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2$$

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2\right) - \frac{GmM}{r}$$

2.Erhaltungssätze

Beispiele $$q_i \to q_i' = q_i + \epsilon \Psi_i(\{q_j\}, t), \qquad t \to t' = t + \epsilon X(\{q_j\}, t)$$

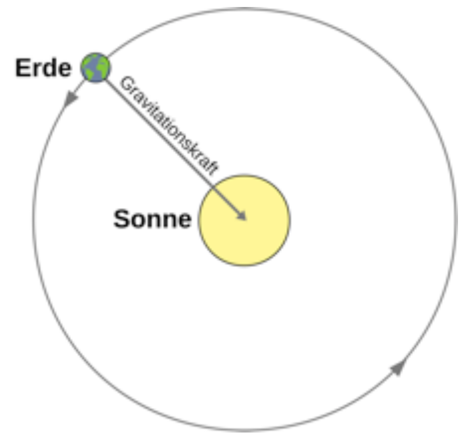
$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \; L(\{q\}, \{\mathrm{d}q/\mathrm{d}t\}, t) = \int_{t_1'}^{t_2'} \mathrm{d}t' \; L(\{q'\}, \{\mathrm{d}q'/\mathrm{d}t'\}, t').$$

$$\boxed{I = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} [\Psi_i - X \dot{q}_i] + LX}$$

4. Die Isotropie des Raumes. Symmetrie: Rotationssymmetrie.
Symmetrietransformationen : Drehungen.

$$L = \frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2\theta \; \dot{\phi}^2 \right) - \frac{GmM}{r}$$

$$\phi \to \phi' = \phi + \epsilon, \qquad L(r, \theta, \phi) = L(r, \theta, \phi')$$



$$\boxed{p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m r^2 \sin^2\theta \; \dot{\phi}}$$

Die Verschiebung des Azimutalswinkels entspricht einer Drehung um die z-Achse

$$\vec{r} = r(\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta) \to \vec{r}' = r(\sin\theta\cos(\phi+\epsilon), \sin\theta\sin(\phi+\epsilon), \cos\theta)$$

$$\vec{r}' = \vec{r} + \delta\vec{r}, \qquad \delta\vec{r} = \delta\phi \; [\vec{e}_z \times \vec{r}]$$

2.Erhaltungssätze

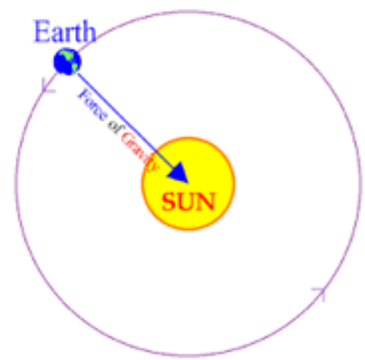
Beispiele $$q_i \to q_i' = q_i + \epsilon \Psi_i(\{q_j\}, t), \qquad t \to t' = t + \epsilon X(\{q_j\}, t)$$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \; L(\{q\}, \{\mathrm{d}q/\mathrm{d}t\}, t) = \int_{t_1'}^{t_2'} \mathrm{d}t' \; L(\{q'\}, \{\mathrm{d}q'/\mathrm{d}t'\}, t').$$

$$\boxed{I = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} [\Psi_i - X \dot{q}_i] + LX}$$

4. Die Isotropie des Raumes. Symmetrie: Rotationssymmetrie.
Symmetrietransformationen : Drehungen.

$$L = \frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2} - \frac{GmM}{|\vec{r}|}$$



Aber, wir können um eine **beliebige** Achse drehen !

$$\vec{r}' = \vec{r} + \delta\vec{r}, \quad \delta\vec{r} = \delta\phi \, [\vec{e}_z \times \vec{r}] \quad \to \quad \delta\vec{r} = \delta\phi \, [\vec{n} \times \vec{r}]$$

$$\dot{\vec{r}}' = \dot{\vec{r}} + \delta\dot{\vec{r}}, \quad \delta\dot{\vec{r}} = \delta\phi \, [\vec{n} \times \dot{\vec{r}}]$$

$$\vec{r}^2 \to \vec{r}'^2, \quad \dot{\vec{r}} \to \dot{\vec{r}}', \quad L(\dot{\vec{r}}, \vec{r}, t) = L(\dot{\vec{r}}', \vec{r}', t)$$

$$\Psi_i = \epsilon_{ijk} n_j r_k \quad \to \quad \mathcal{M}_n = \sum \frac{\partial L}{\partial r_i} \Psi_i = \vec{n} \cdot [\vec{r} \times \vec{p}]$$

Der Drehimpuls ist erhalten. $$\boxed{\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{p}]}$$

2.Erhaltungssätze

Beispiele: 5. Die Ahnlichkeitstransformation und das Virialtheorem

$$\boxed{U(\lambda\vec{r}) = \lambda^n U(\vec{r})} \qquad \vec{r} \to \vec{r}' = \lambda\vec{r}, \quad t \to t' = \lambda^{(2-n)/2} t$$

$$L' = \frac{m}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}'}{\mathrm{d}t}\right)^2 - U(\vec{r}') = \lambda^n\left[\frac{m}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right)^2 - U(\vec{r}')\right] = \lambda^n L \qquad S' = \lambda^{(2+n)/2} S$$

$$0 = S' - \lambda^{(2+n)/2} S \qquad \lambda = 1+\epsilon \qquad \vec{\Psi} = \vec{r}, \quad X = \frac{(2-n)}{2}\,t$$

$$0 = \int \mathrm{d}t \left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}}\vec{\Psi} - EX\right] - \frac{(2+n)}{2}L\right\} = \int \mathrm{d}t \left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[m\dot{\vec{r}}\cdot\vec{r} - E\frac{(2-n)}{2}t\right] - \frac{(2+n)}{2}L\right\}$$

Um diese Grosse zu interpretieren, ist es nützlich das Integral über einen unendlich grossen Zeitraum zu mitteln. Für finite Bewegungen, verschwindet der ersten Term

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[m\vec{r}\dot{\vec{r}}\right] = 0 \qquad \frac{(2-n)}{2}E = -\frac{(2+n)}{2}\langle L\rangle, \quad \langle L\rangle = \langle T\rangle - \langle U\rangle, \quad E = \langle T\rangle + \langle U\rangle$$

$$\boxed{\langle T\rangle = \frac{n}{2}\langle U\rangle}$$