

Zusammenfassung

1) Falls **Zwangsbedingungen** die Freiheitsgrade einschränken, kann man die abhängige Koordinaten aus der Lagrangfunktion eliminieren;

2) Es ist auch möglich die Zwangsbedingungen **mit Hilfe der Lagrange faktoren zu berücksichtigen.**

$$f(q_1, q_2, \dots, q_N, t) = 0 \quad \text{z.B.} \quad x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

$$L \rightarrow L' = L + \lambda f(q_1, \dots, q_N, t)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L'}{\partial q_i} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{\lambda}} = \frac{\partial L'}{\partial \lambda} \Rightarrow 0 = f(q_1, \dots, q_N, t)$$

3) Zeitunabhängige Funktionen von Koordinaten und Geschwindigkeiten des Systems und auch von der Zeit, heissen **Bewegungsintegrale**. **Die Bewegungsintegrale sind sehr interessant weil sie uns helfen können die Bewegungsgleichungen zu lösen.**

Wir kann man die Bewegungsintegrale systematisch bestimmen?

$$I \equiv I(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}, t) \Leftrightarrow \frac{dI}{dt} = 0$$

2. Erhaltungssätze

Die Bewegungsintegrale sind eng mit den Symmetrien der Wirkung verbunden. Was das genau bedeutet, zeigt das Noether-Theorem.

Noether-Theorem: Wir betrachten ein mechanisches System, dessen Wirkung invariant unter der folgenden infinitesimalen Transformationen ist

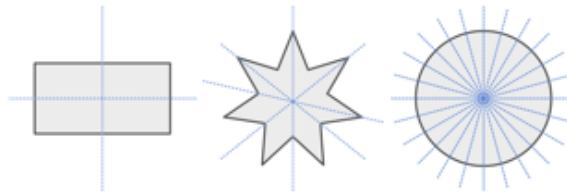
$$q_i \rightarrow q'_i = q_i + \epsilon \Psi_i(\{q_j\}, t), \quad t \rightarrow t' = t + \epsilon X(\{q_j\}, t) \quad \epsilon \ll 1$$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \, L(\{q\}, \{dq/dt\}, t) = \int_{t'_1}^{t'_2} dt' \, L(\{q'\}, \{dq'/dt'\}, t') + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

Dann ist die Grösse
$$I = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} [\Psi_i - X \dot{q}_i] + LX$$
 erhalten (d.h. zeitunabhängig)

Symmetrien

Jeder weiss was eine Symmetrie bedeutet (Spiegelsymmetrie, Drehsymmetrie u.s.w.)



Es gibt auch die Symmetrien in Gleichungen. Z.b:

$$U(z, y, z) = \frac{\alpha}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\begin{aligned} x &= \cos \theta x' + \sin \theta y' \\ y &= -\sin \theta x' + \cos \theta y' \\ z &= z' \end{aligned}$$

$$U(x', y', z') = \frac{\alpha}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}$$

$$E^2 - p^2 = m^2$$

$$\begin{aligned} E &= \cosh \theta E' + \sinh \theta' p' \\ p &= \sinh \theta p' + \cosh \theta' E' \end{aligned}$$

$$E'^2 - p'^2 = m^2$$

$$U(x, y, z) = x$$

$$\begin{aligned} x &= \cos \theta x' + \sin \theta y' \\ y &= -\sin \theta x' + \cos \theta y' \\ z &= z' \end{aligned}$$

$$\tilde{U}(x', y', z') = \cos \theta x' + \sin \theta y'$$

Symmetrien

Symmetrien in den Gleichungen bedeuten, dass bestimmte physikalische Größen erhalten sind. D.h. dass Symmetrien ein wichtiger Bestandteil von physikalischen Theorien sind.

- Warum folgen freie Teilchen einer Geraden?
- Warum -- wenn Planeten sich bewegen -- sind die Orbits (fast) geschlossen?
- Warum ist die elektrische Ladung erhalten?
- Warum haben Photonen keine Masse?
- Warum gibt keine Zerfälle von Muonen zu Elektronen?
- Warum sind die Gravitationsmasse und die Bewegungsmasse gleich?

2. Erhaltungssätze

Die Bewegungsintegrale sind eng mit den Symmetrien der Wirkung verbunden. Was das genau bedeutet, zeigt das Noether-Theorem.

Noether-Theorem: Wir betrachten ein mechanisches System, dessen Wirkung invariant unter der folgenden infinitesimalen Transformationen ist

$$q_i \rightarrow q'_i = q_i + \epsilon \Psi_i(\{q_j\}, t), \quad t \rightarrow t' = t + \epsilon X(\{q_j\}, t) \quad \epsilon \ll 1$$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \, L(\{q\}, \{dq/dt\}, t) = \int_{t'_1}^{t'_2} dt' \, L(\{q'\}, \{dq'/dt'\}, t') + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

Dann ist die Grösse
$$I = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} [\Psi_i - X \dot{q}_i] + LX$$
 erhalten (d.h. zeitunabhängig)

2. Erhaltungssätze

Wir wollen die "neue" Wirkung mit Hilfe der "alten" Koordinaten ausdrücken

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(\{q\}, \{dq/dt\}, t) = \int_{t'_1}^{t'_2} dt' L(\{q'\}, \{dq'/dt'\}, t').$$

$$q_i \rightarrow q'_i = q_i + \epsilon \Psi_i(\{q_j\}, t), \quad t \rightarrow t' = t + \epsilon X(\{q_j\}, t)$$

$$dt' = dt \left(1 + \epsilon \frac{dX}{dt} \right) \quad \frac{dq'_i}{dt'} = \frac{d(q_i + \epsilon \Psi_i)}{dt \left(1 + \epsilon \frac{dX}{dt} \right)} = \dot{q}_i + \epsilon \left[\frac{d\Psi_i}{dt} - \frac{dX}{dt} \dot{q}_i \right] + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

$$f(x', y', z') \approx f(x, y, z) + \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z + \dots$$

$$L(\{q'\}, \{dq'/dt'\}, t') \approx L(\{q\}, \{\dot{q}\}, t) + \epsilon X \frac{\partial L}{\partial t} + \epsilon \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \Psi_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d\Psi_i}{dt} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{dX}{dt} \dot{q}_i \right] + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

$$S' = \int_{t'_1}^{t'_2} dt' L(\{q'\}, \{dq'/dt'\}, t') = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(1 + \epsilon \frac{dX}{dt} \right) L(\{q'\}, \{dq'/dt'\}, t')$$

$$0 = S' - S = \epsilon \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \frac{dX}{dt} L + \frac{\partial L}{\partial t} X + \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \Psi_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{d\Psi_i}{dt} - \frac{dX}{dt} \dot{q}_i \right) \right] \right\} + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

2. Erhaltungssätze

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \frac{dX}{dt} L + \frac{\partial L}{\partial t} X + \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \Psi_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{d\Psi_i}{dt} - \frac{dX}{dt} \dot{q}_i \right) \right] \right\}$$

Um das Bewegungsintegral zu extrahieren müssen wir in der obigen Formel die totale Zeitableitung identifizieren. **Dieser Schritt gilt nur für Bahnen, welche die Euler-Lagrange Gleichungen erfüllen.**

$$\text{a) } \frac{\partial L}{\partial q_i} \Psi_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d\Psi_i}{dt} \stackrel{\text{BG}}{=} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] \Psi_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d\Psi_i}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \Psi_i \right]$$

$$\text{b) } \frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \stackrel{\text{BG}}{=} \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_i \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{dX}{dt} L + \frac{\partial L}{\partial t} X - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \left[\frac{dX}{dt} \dot{q}_i \right] &= \frac{d}{dt} [LX] - X \frac{dL}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t} X - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \left[\frac{dX}{dt} \dot{q}_i \right] \\ &= \frac{d}{dt} [LX] - \sum_i \left[\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] \dot{q}_i X + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i X + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \frac{dX}{dt} \right] = \frac{d}{dt} \left[LX - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i X \right] \end{aligned}$$

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} \left[\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \Psi_i + LX - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i X \right] \Rightarrow I = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} [\Psi_i - X \dot{q}_i] + LX = \text{const}$$

2. Erhaltungssätze

Beispiele

$$q_i \rightarrow q'_i = q_i + \epsilon \Psi_i(\{q_j\}, t), \quad t \rightarrow t' = t + \epsilon X(\{q_j\}, t)$$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(\{q\}, \{dq/dt\}, t) = \int_{t'_1}^{t'_2} dt' L(\{q'\}, \{dq'/dt'\}, t').$$

$$I = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} [\Psi_i - X \dot{q}_i] + LX$$

1. Zeitunabhängigkeit der Lagrangefunktion. Symmetrie: Homogenität der Zeit.
Symmetrietransformation: Zeitverschiebung

$$L = L(q_1, q_2, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_N) \quad q_i \rightarrow q'_i = q_i, \quad t \rightarrow t' = t + \epsilon, \quad \Rightarrow \quad \Psi_i = 0, X = 1$$

Die Energie ist erhalten

$$E = \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \quad \frac{dE}{dt} = 0$$

2. Unabhängigkeit der Lagrangefunktion von einer Koordinate (man nennt diese Koordinate **zyklisch**). Symmetrie: Homogenität des Raumes. Symmetrietransformation: Koordinatenverschiebung

$$L = L(q_2, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_N, t)$$

$$q_1 \rightarrow q'_1 = q_1 + \epsilon, q_{i \neq 1} \rightarrow q'_i = q_i, \quad t \rightarrow t' = t, \quad \Rightarrow \quad \Psi_1 = 1, \quad \Psi_{i \neq 1} = 0, \quad X = 0.$$

Der entsprechende Impuls ist erhalten.

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \quad \frac{dp_1}{dt} = 0$$

2. Erhaltungssätze

Beispiele

$$q_i \rightarrow q'_i = q_i + \epsilon \Psi_i(\{q_j\}, t), \quad t \rightarrow t' = t + \epsilon X(\{q_j\}, t)$$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(\{q\}, \{dq/dt\}, t) = \int_{t'_1}^{t'_2} dt' L(\{q'\}, \{dq'/dt'\}, t').$$

$$I = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} [\Psi_i - X \dot{q}_i] + LX$$

3. Geschlossene Systeme. Symmetrietransformation: Verschiebung des Koordinatenursprung.

$$L = \sum_{i=1}^N \frac{m_i \dot{\vec{r}}_i^2}{2} - \sum_{ij} U_{ij}(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$$

$$\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}'_i = \vec{r}_i + \vec{\epsilon}, \quad \vec{t}' = \vec{t}, \quad \Psi_i^j = 1. \quad X = 0$$

Der Gesamtimpuls des Systems ist erhalten

$$\vec{P}_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \quad \frac{d}{dt} \vec{P}_{\text{tot}} = 0$$

Die Folge: Der Schwerpunkt eines geschlossenen Systems bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit.

$$\vec{R} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i}$$

$$\frac{d}{dt} \vec{R} = \frac{\sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{\vec{P}_{\text{tot}}}{M_{\text{tot}}} = \vec{V}$$