Zusammenfassung der ersten Vorlesung

1. Es geht um die Mechanik.

2. Jedes mechanische System kann mittels einer Lagrangefunktion charakterisiert werden. Die Lagrangefunktion hängt von den verallgemeinerten Koordinaten, den Geschwindigkeiten und der Zeit ab.

$$L(\{q_i\},\{\dot{q}_i\},t)$$

3. Die Lagrangefunktion ist durch die Differenz von kinetischer und potentieller Energie des Systems gegeben.

$$L = T - U \qquad\qquad L = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i\,\dot{\vec{r}}_i^{\,2}}{2} - U(\vec{r}_1,\vec{r}_2,..,\vec{r}_N)$$

4. Integriert man die Lagrangefunktion über die Zeit, bekommt man die Wirkung.

$$S[\{q_i(t)\}] = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t L(\{q_i\},\{\dot{q}_i\},t),t), \quad q_i(t_1) = q_{i,1}, \quad q_i(t_2) = q_{i,2}$$

5. Die Bahn die die Wirkung minimiert enspricht der Bewegung eines mechanischen Systems in der Natur. Diese Bahn ist die Lösung der Euler-Lagrange Gleichungen.

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

1. Prinzip der kleinsten Wirkung

Die unabhängigen Grössen, welche man braucht um ein mechanisches System vollständig zu beschreiben nennt man **Freiheitsgrade**. Die Zahl der Freiheitsgrade ist durch Zwangsbedinungen beschränkt.

$$f(q_1, q_2, \dots q_N, t) = 0$$

Es gibt zwei Möglichkeiten mit Zwangsbedinungen umzugehen. Entweder eliminiert man abhängige Koordinaten aus der Lagrangefunktion oder man benutzt **Lagrangefaktoren und ändert damit die Lagrangefunktion.**

$$L \to L' = L + \lambda f(q_1, \dots, q_N, t)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L'}{\partial q_i} \qquad\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L'}{\partial \dot{\lambda}} = \frac{\partial L'}{\partial \lambda} \quad \Rightarrow \quad 0 = f(q_1, \dots q_N, t)$$

1. Prinzip der kleinsten Wirkung

Ein Beispiel: Wie bewegt sich ein Teilchen auf einer Stange im Gravitationsfeld? Wir nehmen an, dass das Teilchen sich bei t=0 mit null Geschwindigkeit im Punkt $x = 0, \quad y = L\cos\theta$ befindet. Es gibt kein Reibung.

Wir beginnen mit der Lagrangefunktion in kartesischen Koordinaten.

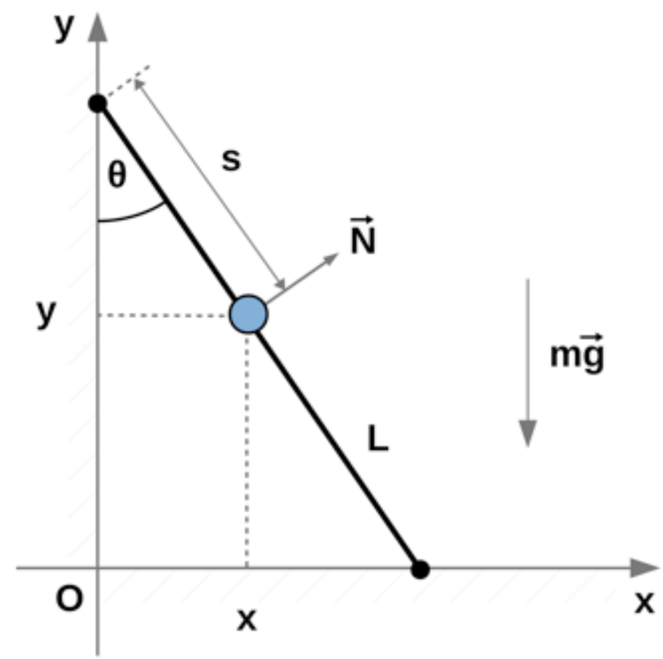
$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{m\dot{y}^2}{2} - mgy$$

$$0 < x < L\sin\theta, \quad 0 < y < L\cos\theta.$$

Die Koordinaten x und y sind nicht unabhängig !

$$x = s\sin\theta, \quad y = L\cos\theta - s\cos\theta$$

$$\boxed{y\sin\theta + x\cos\theta - L\sin\theta\cos\theta = 0}$$



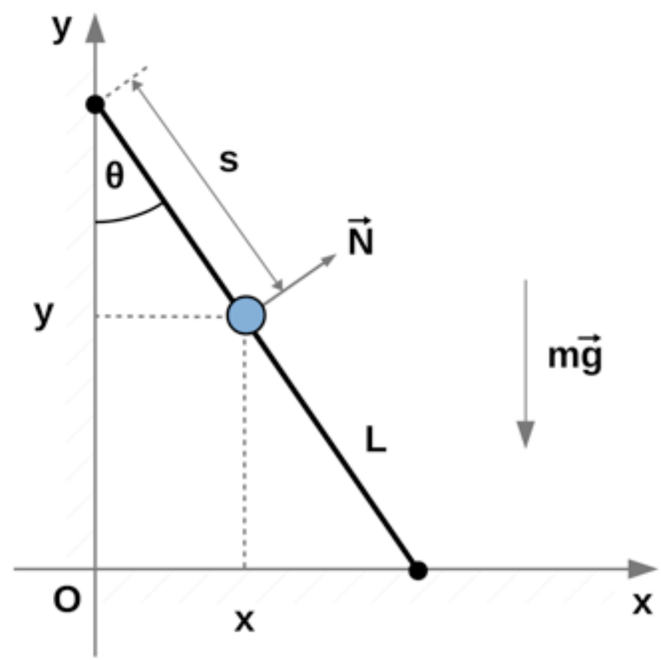
Wir können diese Abhängigkeit entweder los werden oder die Lagrangefaktoren benutzen.

1. Prinzip der kleinsten Wirkung

a) Zwangsbedinungen explizit eliminieren. Wir wählen die Länge “s” entlang der Stange als die neue Koordinate.

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{m\dot{y}^2}{2} - mgy$$

$$0 < s < L$$



$$x = s\sin\theta, \quad y = L\cos\theta - s\cos\theta$$

$$\dot{x} = \dot{s}\sin\theta, \quad \dot{y} = -\dot{s}\cos\theta$$

$$L = \frac{m\dot{s}^2}{2} - mg(L\cos\theta - s\cos\theta)$$

$$m\ddot{s} = mg\cos\theta \Rightarrow s(t) = \frac{g\cos\theta}{2}t^2$$

$$x = \frac{g\cos\theta\sin\theta}{2}t^2, \quad y = L\cos\theta - \frac{g\cos^2\theta}{2}t^2$$

1. Prinzip der kleinsten Wirkung

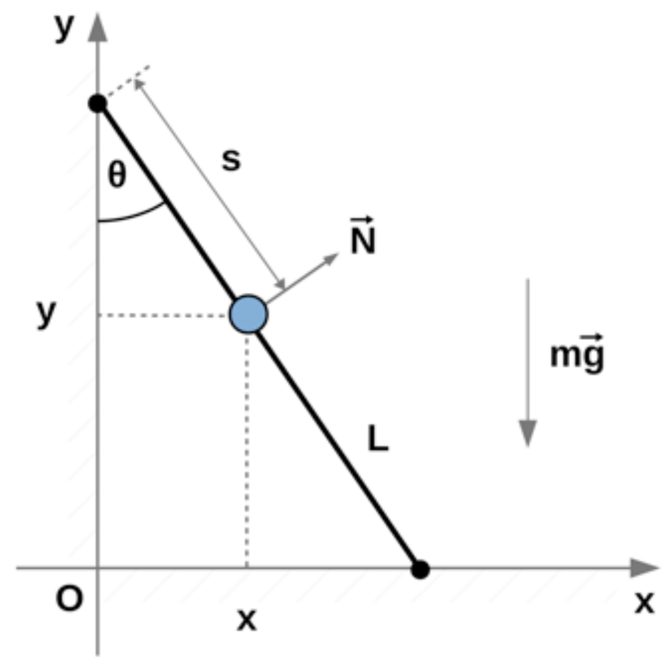
b). Lagrangefaktoren

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{m\dot{y}^2}{2} - mgy \longrightarrow L = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{m\dot{y}^2}{2} - mgy + \lambda\,(y\sin\theta + x\cos\theta - L\sin\theta\cos\theta))$$

$$\boxed{y\sin\theta + x\cos\theta - L\sin\theta\cos\theta = 0}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \longrightarrow \boxed{y\sin\theta + x\cos\theta - L\sin\theta\cos\theta = 0}$$

$$\boxed{m\ddot{x} = \lambda\cos\theta} \qquad \boxed{m\ddot{y} = -mg + \lambda\sin\theta}$$



$$\ddot{y}\sin\theta + \ddot{x}\sin\theta = 0$$

$$m\ddot{y} = -mg - \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}m\ddot{y} \longrightarrow \ddot{y} = -g\cos^2\theta$$

$$\ddot{x} = g\cos\theta\sin\theta \qquad x = \frac{g\cos\theta\sin\theta}{2}\,t^2 \qquad y = L\cos\theta - \frac{g\cos^2\theta}{2}\,t^2$$

1. Prinzip der kleinsten Wirkung

c) Das zweite newtonsche Gesetz.

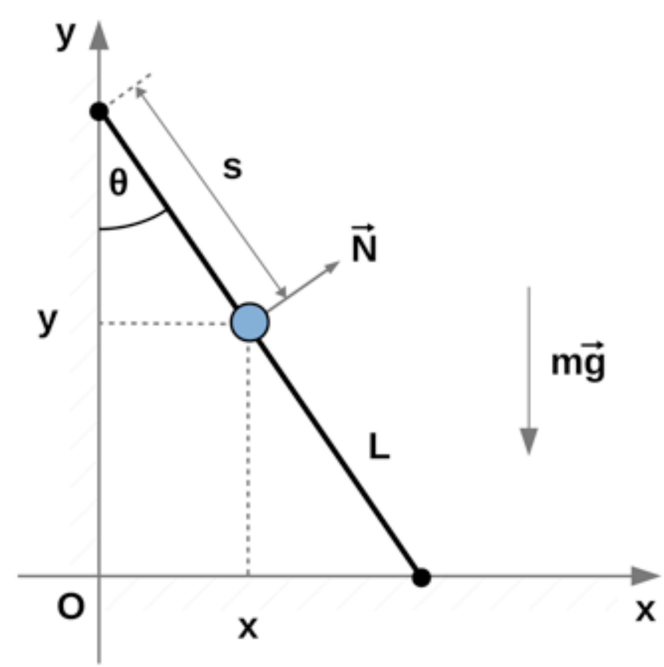
Zwei Kräfte: Die Gravitationskraft und die Zwangskraft.

Die Zwangsskraft wirkt orthogonal zur der Stange, d.h. sie hat keine Komponente entlang der Stange. Die Komponente der Gravitationskraft entlang der Stange bestimmt die Bewegung des Teilchens.

$$F_{||} = mg\cos\theta$$

$$m\ddot{s} = mg\cos\theta$$

$$s = g\cos\theta\,\frac{t^2}{2}$$



1. Prinzip der kleinsten Wirkung

Zwei allgemeine Bemerkungen.

1) Sind die Zwangsbedinungen von Geschwindigkeiten abhängig, muss man die abhangige Grösse aus der Lagrangefunktion eliminieren; Lagrangefaktoren kann man in diesem Fall nicht benutzen.

2) Die Lagrangefunktion eines mechanischen Systems ist nur bis auf die totale Zeitableitung einer beliebigen Funktion von verallgemeinerten Koordinaten definiert.

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \, L(q, \dot{q}, t), \quad q(t_1) = q_1, \quad q(t_2) = q_2$$

$$L(q, \dot{q}, t) \to L(q, \dot{q}, t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(q, t) \longleftarrow$$

Keine Abhangigkeit von der Geschwindigkeit !

$$S_{\mathrm{new}} = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \, \left(L(q, \dot{q}, t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(q, t) \right) = S + f(q_2, t) - f(q_1, t)$$

$$\delta S_{\mathrm{new}} = \delta S \longrightarrow$$

Identische Bewegungsgleichungen !

Wo kommt der Prinzip den kleinsten Wirkung her ?

VOLUME 20, NUMBER 2 APRIL, 1948

Space-Time Approach to Non-Relativistic Quantum Mechanics

R. P. FEYNMAN

Cornell University, Ithaca, New York

Non-relativistic quantum mechanics is formulated here in a different way. It is, however, mathematically equivalent to the familiar formulation. In quantum mechanics the probability of an event which can happen in several different ways is the absolute square of a sum of complex contributions, one from each alternative way. The probability that a particle will be found to have a path $x(t)$ lying somewhere within a region of space time is the square of a sum of contributions, one from each path in the region. The contribution from a single path is postulated to be an exponential whose (imaginary) phase is the classical action (in units of $\hbar$) for the path in question. The total contribution from all paths reaching x, t from the past is the wave function $\psi(x, t)$. This is shown to satisfy Schroedinger's equation. The relation to matrix and operator algebra is discussed. Applications are indicated, in particular to eliminate the coordinates of the field oscillators from the equations of quantum electrodynamics.

Quanten Mechanik: alle Bahnen sind erlaubt und kann auch in der Natur passieren. Die Wahrscheinlichkeiten das ein Bahn verfolgt wird unterscheiden sich aber gewaltig.

$$\mathcal{P} \sim e^{iS/\hbar} \qquad \hbar = 1.0545718 \times 10^{-34} m^2 kg/s$$

2. Erhältungssätze

Zeitunabhängige Funktionen von Koordinaten und Geschwindigkeiten des Systems und auch von der Zeit, heissen Bewegungsintegrale.

$$I \equiv I(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}, t) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = 0$$

Ein Beispiel: Zeitunabhängige Lagrangefunktion $L = L(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\})$

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \sum \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i \qquad\qquad \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \sum \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\dot{q}_i + \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i = \sum \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L\right) = 0.}$$

Diese Grösse nennt man die Energie des Systems: $E = \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L$

$$L = T - U(\{q_i\}), \quad T = \frac{1}{2}\sum m_{\alpha\beta}(\{q_i\})\dot{q}_\alpha\dot{q}_\beta \quad \Rightarrow \quad E = T + U$$

Falls ein mechanisches System durch eine zeitunabhängige Lagrangefunktion beschrieben wird, ist für dieses System die Energie eine erhaltende Grösse.

2. Erhaltungssätze

Die Bewegungsintegrale sind eng mit den Symmetrien der Wirkung verbunden. Was das genau bedeutet, zeigt das Noether-Theorem.

Noether-Theorem: Wir betrachten ein mechanischen System, dessen Wirkung invariant unter der folgende infinitesimale Transformationen ist

$$q_i \to q_i' = q_i + \epsilon \Psi_i(\{q_j\}, t), \qquad t \to t' = t + \epsilon X(\{q_j\}, t) \qquad \epsilon \ll 1$$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \; L(\{q\}, \{\mathrm{d}q/\mathrm{d}t\}, t) = \int_{t_1'}^{t_2'} \mathrm{d}t' \; L(\{q'\}, \{\mathrm{d}q'/\mathrm{d}t'\}, t'). + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

Dann ist die Grösse $I = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} [\Psi_i - X \dot{q}_i] + LX$ erhalten (d.h. zeitunabhängig)

2.Erhaltungssätze

Wir wollen die ``neue” Wirkung mit Hilfe der ``alten” Koordinaten ausdrücken

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \; L(\{q\}, \{\mathrm{d}q/\mathrm{d}t\}, t) = \int_{t_1'}^{t_2'} \mathrm{d}t' \; L(\{q'\}, \{\mathrm{d}q'/\mathrm{d}t'\}, t').$$

$$q_i \to q_i' = q_i + \epsilon \Psi_i(\{q_j\}, t), \qquad t \to t' = t + \epsilon X(\{q_j\}, t)$$

$$\mathrm{d}t' = \mathrm{d}t \; \left(1 + \epsilon \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}\right) \qquad \frac{\mathrm{d}q_i'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}(q_i + \epsilon \Psi_i)}{\mathrm{d}t \; \left(1 + \epsilon \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}\right)} = \dot{q}_i + \epsilon \left[\frac{\mathrm{d}\Psi_i}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}\dot{q}_i\right] + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

$$L(\{q'\}, \{\mathrm{d}q'/\mathrm{d}t'\}, t') \approx L(\{q\}, \{\dot{q}\}, t) + \epsilon X \frac{\partial L}{\partial t} + \epsilon \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i}\Psi_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\mathrm{d}\Psi_i}{\mathrm{d}t} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}\dot{q}_i\right] + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

$$S' = \int_{t_1'}^{t_2'} \mathrm{d}t' \; L(\{q'\}, \{\mathrm{d}q'/\mathrm{d}t'\}, t') = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \; \left(1 + \epsilon \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}\right) L(\{q'\}, \{\mathrm{d}q'/\mathrm{d}t'\}, t')$$

$$\boxed{0 = S' - S = \epsilon \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left\{\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} L + \frac{\partial L}{\partial t} X + \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i}\Psi_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{\mathrm{d}\Psi_i}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}\dot{q}_i\right)\right]\right\} + \mathcal{O}(\epsilon^2)}$$

2. Erhaltungssätze

$$\boxed{0=\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\left\{\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}L+\frac{\partial L}{\partial t}X+\sum_i\left[\frac{\partial L}{\partial q_i}\Psi_i+\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\left(\frac{\mathrm{d}\Psi_i}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}\dot q_i\right)\right]\right\}}$$

Um das Bewegungsintegral zu extrahieren, mussen wir die totale Zeitableitung in der obigen Formel identifizieren. Dieser Schritt gilt nur für Bahnen, die die Euler-Lagrange Gleichungen erfüllen.

$$\frac{\partial L}{\partial q_i}\Psi_i+\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\frac{\mathrm{d}\Psi_i}{\mathrm{d}t}\stackrel{\mathrm{BG}}{=}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right]\Psi_i+\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\frac{\mathrm{d}\Psi_i}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\Psi_i\right]$$

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial L}{\partial t}+\sum_i\frac{\partial L}{\partial q_i}\dot q_i+\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\ddot q_i\stackrel{\mathrm{BG}}{=}\frac{\partial L}{\partial t}+\sum_i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right]\dot q_i+\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\ddot q_i$$

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}L+\frac{\partial L}{\partial t}X-\sum_i\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\left[\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}\dot q_i\right]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[LX]-X\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial L}{\partial t}X-\sum_i\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\left[\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}\dot q_i\right]$$

$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[LX]-\sum_i\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right]\dot q_iX+\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\ddot q_iX+\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\dot q_i\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}\right]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[LX-\sum_i\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\dot q_iX\right]$$

$$\boxed{0=\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\sum_i\frac{\partial L}{\partial q_i}\Psi_i+LX-\sum_i\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\dot q_iX\right]\quad\Rightarrow\quad I=\sum_i\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}[\Psi_i-X\dot q_i]+LX=\mathrm{const}}$$

2.Erhaltungssätze

Beispiele $$q_i \to q_i' = q_i + \epsilon\Psi_i(\{q_j\},t), \qquad t \to t' = t + \epsilon X(\{q_j\},t)$$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\ L(\{q\},\{\mathrm{d}q/\mathrm{d}t\},t) = \int_{t_1'}^{t_2'} \mathrm{d}t'\ L(\{q'\},\{\mathrm{d}q'/\mathrm{d}t'\},t').$$

$$\boxed{I = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}[\Psi_i - X\dot{q}_i] + LX}$$

1. Zeitunabhangigkeit der Lagrangefunktion. Symmetrie: Homogenität der Zeit.
Symmetrietransformation: Zeitverschiebung

$$L = L(q_1, q_2, \ldots, q_N, \dot{q_1}, \dot{q_2}, .., \dot{q_N}) \qquad q_i \to q_i' = q_i, \quad t \to t' = t + \epsilon, \quad \Rightarrow \quad \Psi_i = 0, X = 1$$

Die Energie ist erhaltend

$$E = \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L \qquad \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0$$

2. Unabhängigkeit der Lagrangefunktion von einer Koordinate (man nennt diese Koordinate zyklisch) . Symmetrie: Homogenität des Raumes.
Symmetrietransformation: Koordinatenverschiebung.

$$L = L(q_2, \ldots, q_N, \dot{q_1}, \dot{q_2}, .., \dot{q_N}, t)$$

$$q_1 \to q_1' = q_1 + \epsilon, q_{i\neq 1} \to q_i' = q_i, \quad t \to t' = t, \quad \Rightarrow \quad \Psi_1 = 1, \quad \Psi_{i\neq 1} = 0, \ X = 0.$$

Der ensprechenden Impuls ist erhaltend

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q_1}} \qquad \frac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}t} = 0$$

2.Erhaltungssätze

Beispiele $$q_i \to q_i' = q_i + \epsilon \Psi_i(\{q_j\}, t), \qquad t \to t' = t + \epsilon X(\{q_j\}, t)$$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\ L(\{q\}, \{\mathrm{d}q/\mathrm{d}t\}, t) = \int_{t_1'}^{t_2'} \mathrm{d}t'\ L(\{q'\}, \{\mathrm{d}q'/\mathrm{d}t'\}, t').$$

$$\boxed{I = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} [\Psi_i - X\dot{q}_i] + LX}$$

3. Geschlossene Systeme. Symmetrietransformation: Verschiebung des Koordinatenursprung.

$$L = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2}}{2} - \sum_{ij} U_{ij}(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \qquad \vec{r}_i \to \vec{r}_i{}' = \vec{r}_i + \vec{\epsilon}, \quad \vec{t}' = \vec{t}, \quad \Psi_i^j = 1.$$

Der Gesamtimpuls des Systems ist erhalten

$$\vec{P}_{\mathrm{tot}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} = \sum_i^N m_i \dot{\vec{r}}_i \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{P}_{\mathrm{tot}} = 0$$

Die Folge: Der Schwerpunkt eines geschlossenen Systems bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit

$$\vec{R} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{\sum\limits_{i=1}^{N} m_i} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{R} = \frac{\sum\limits_{i}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i}{\sum\limits_{i=1}^{N} m_i} = \frac{\vec{P}_{\mathrm{tot}}}{M_{\mathrm{tot}}} = \vec{V}$$

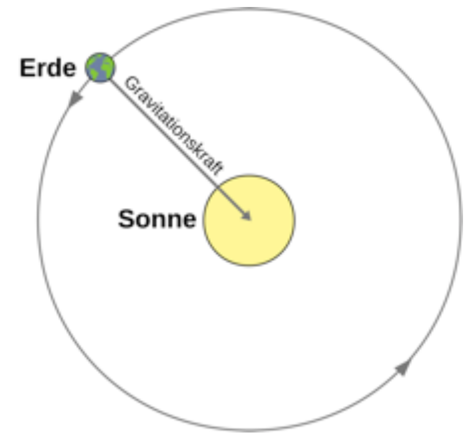
2.Erhaltungssätze

Beispiele $$q_i \to q_i' = q_i + \epsilon \Psi_i(\{q_j\}, t), \qquad t \to t' = t + \epsilon X(\{q_j\}, t)$$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\ L(\{q\}, \{\mathrm{d}q/\mathrm{d}t\}, t) = \int_{t_1'}^{t_2'} \mathrm{d}t'\ L(\{q'\}, \{\mathrm{d}q'/\mathrm{d}t'\}, t').$$

$$\boxed{I = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \left[\Psi_i - X \dot{q}_i\right] + LX}$$

4. Die Isotropie des Raumes. Symmetrie: Rotationssymmetrie.
Symmetrietransformationen : Drehungen.



Die Erde im Gravitationsfeld der Sonne. Die potentielle Energie der Erde ist unabhängig von der Richtung des Ortsvektors.

$$L = \frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2} - \frac{GmM}{|\vec{r}|}$$

$$\vec{r} = r(\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\frac{\vec{r}}{r} + r\dot{\theta}(\cos\theta\cos\phi, \cos\theta\sin\phi, -\sin\theta) + r\dot{\phi}(-\sin\theta\sin\phi, \cos\theta\cos\phi, 0) \Rightarrow$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\phi}\vec{e}_\phi$$

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}, \quad i, i \in \{r, \theta, \phi\}$$

$$\begin{aligned} \vec{e}_r &= (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta) \\ \vec{e}_\theta &= (\cos\theta\cos\phi, \cos\theta\sin\phi, -\sin\theta) \\ \vec{e}_\phi &= (-\sin\theta\sin\phi, \cos\theta\cos\phi, 0) \end{aligned}$$

$$\dot{\vec{r}}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\ \dot{\phi}^2$$

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\ \dot{\phi}^2\right) - \frac{GmM}{r}$$

2.Erhaltungssätze

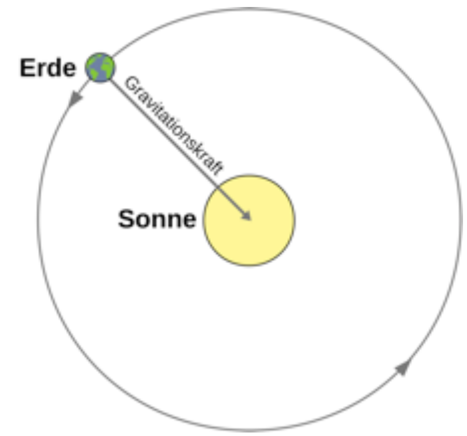
Beispiele $$q_i \to q_i' = q_i + \epsilon \Psi_i(\{q_j\}, t), \qquad t \to t' = t + \epsilon X(\{q_j\}, t)$$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\ L(\{q\}, \{\mathrm{d}q/\mathrm{d}t\}, t) = \int_{t_1'}^{t_2'} \mathrm{d}t'\ L(\{q'\}, \{\mathrm{d}q'/\mathrm{d}t'\}, t').$$

$$\boxed{I = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \left[\Psi_i - X \dot{q}_i\right] + LX}$$

4. Die Isotropie des Raumes. Symmetrie: Rotationssymmetrie.
Symmetrietransformationen : Drehungen.

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2\theta\ \dot{\phi}^2\right) - \frac{GmM}{r}$$



$$\phi \to \phi' = \phi + \epsilon, \qquad L(r, \theta, \phi) = L(r, \theta, \phi')$$

$$\boxed{p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m r^2 \sin^2\theta\ \dot{\phi}}$$

Die Verschiebung des Azimutalswinkels entspricht einer Drehung um die z-Achse

$$\vec{r} = r(\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta) \to \vec{r}' = r(\sin\theta\cos(\phi+\epsilon), \sin\theta\sin(\phi+\epsilon), \cos\theta)$$

$$\vec{r}' = \vec{r} + \delta\vec{r}, \qquad \delta\vec{r} = \delta\phi\ [\vec{e}_z \times \vec{r}]$$

2.Erhaltungssätze

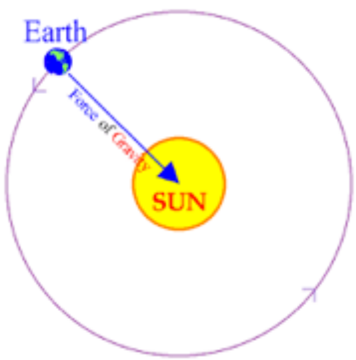
Beispiele $$q_i \to q_i' = q_i + \epsilon \Psi_i(\{q_j\}, t), \qquad t \to t' = t + \epsilon X(\{q_j\}, t)$$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \; L(\{q\}, \{\mathrm{d}q/\mathrm{d}t\}, t) = \int_{t_1'}^{t_2'} \mathrm{d}t' \; L(\{q'\}, \{\mathrm{d}q'/\mathrm{d}t'\}, t').$$

$$\boxed{I = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} [\Psi_i - X\dot{q}_i] + LX}$$

4. Die Isotropie des Raumes. Symmetrie: Rotationssymmetrie.
Symmetrietransformationen : Drehungen.

$$L = \frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2} - \frac{GmM}{|\vec{r}|}$$



Aber, wir können um eine **beliebige** Achse drehen !

$$\vec{r}' = \vec{r} + \delta\vec{r}, \quad \delta\vec{r} = \delta\phi \, [\vec{e}_z \times \vec{r}] \quad \to \quad \delta\vec{r} = \delta\phi \, [\vec{n} \times \vec{r}]$$

$$\dot{\vec{r}}' = \dot{\vec{r}} + \delta\dot{\vec{r}}, \quad \delta\dot{\vec{r}} = \delta\phi \, [\vec{n} \times \dot{\vec{r}}]$$

$$\vec{r}^2 \to \vec{r}'^2, \quad \dot{\vec{r}} \to \dot{\vec{r}}', \quad L(\dot{\vec{r}}, \vec{r}, t) = L(\dot{\vec{r}}', \vec{r}', t)$$

$$\Psi_i = \epsilon_{ijk} n_j r_k \quad \to \quad \mathcal{M}_n = \sum \frac{\partial L}{\partial r_i} \Psi_i = \vec{n} \cdot [\vec{r} \times \vec{p}]$$

Der Drehimpuls ist erhalten. $$\boxed{\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{p}]}$$

2.Erhaltungssätze

Beispiele: 5. Die Ahnlichkeitstransformation und das Virialtheorem

$$\boxed{U(\lambda\vec{r}) = \lambda^n U(\vec{r})} \qquad \vec{r} \to \vec{r}' = \lambda\vec{r}, \quad t \to t' = \lambda^{(2-n)/2} t$$

$$L' = \frac{m}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}'}{\mathrm{d}t}\right)^2 - U(\vec{r}') = \lambda^n \left[\frac{m}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right)^2 - U(\vec{r}')\right] = \lambda^n L \qquad S' = \lambda^{(2+n)/2} S$$

$$0 = S' - \lambda^{(2+n)/2} S \qquad \lambda = 1 + \epsilon \qquad \vec{\Psi} = \vec{r}, \quad X = \frac{(2-n)}{2}\, t$$

$$0 = \int \mathrm{d}t \left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}}\vec{\Psi} - EX\right] - \frac{(2+n)}{2} L\right\} = \int \mathrm{d}t \left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[m\dot{\vec{r}} \cdot \vec{r} - E\frac{(2-n)}{2} t\right] - \frac{(2+n)}{2} L\right\}$$

Um diese Grosse zu interpretieren, ist es nützlich das Integral über einen unendlich grossen Zeitraum zu mitteln. Für finite Bewegungen, verschwindet der ersten Term

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[m\vec{r}\dot{\vec{r}}\right] = 0 \qquad \frac{(2-n)}{2} E = -\frac{(2+n)}{2}\langle L\rangle, \quad \langle L\rangle = \langle T\rangle - \langle U\rangle, \quad E = \langle T\rangle + \langle U\rangle$$

$$\boxed{\langle T\rangle = \frac{n}{2}\langle U\rangle}$$