# Zusammenfassung der ersten Vorlesung

1. Es geht um die Mechanik.

2. Jedes mechanische System kann mittels einer Lagrangefunktion charakterisiert werden. Die Lagrangefunktion hängt von den verallgemeinerten Koordinaten, den Geschwindigkeiten und der Zeit ab.

$$L(\{q_i\},\{\dot{q}_i\},t)$$

3. Die Lagrangefunktion ist durch die Differenz von kinetischer und potentieller Energie des Systems gegeben.

$$L = T - U \qquad\qquad L = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i\, \dot{\vec{r}}_i^{\,2}}{2} - U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, .., \vec{r}_N)$$

4. Integriert man die Lagrangefunktion über die Zeit, bekommt man die Wirkung.

$$S[\{q_i(t)\}] = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t L(\{q_i\},\{\dot{q}_i\},t),t), \quad q_i(t_1) = q_{i,1}, \quad q_i(t_2) = q_{i,2}$$

5. Die Bahn die die Wirkung minimiert enspricht der Bewegung eines mechanischen Systems in der Natur. Diese Bahn ist die Lösung der Euler-Lagrange Gleichungen.

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

# 1. Prinzip der kleinsten Wirkung

Die unabhängigen Grössen, welche man braucht um ein mechanisches System vollständig zu beschreiben nennt man **Freiheitsgrade**. Die Zahl der Freiheitsgrade ist durch Zwangsbedinungen beschränkt.

$$f(q_1, q_2, \dots q_N, t) = 0 \qquad \text{z.B.} \qquad x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

Es gibt zwei Möglichkeiten mit Zwangsbedinungen umzugehen. Entweder eliminiert man abhängige Koordinaten aus der Lagrangefunktion oder man benutzt **Lagrangefaktoren und ändert damit die Lagrangefunktion.**

$$L \to L' = L + \lambda f(q_1, \dots, q_N, t)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L'}{\partial q_i} \qquad\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L'}{\partial \dot{\lambda}} = \frac{\partial L'}{\partial \lambda} \quad \Rightarrow \quad 0 = f(q_1, \dots q_N, t)$$

# 1. Prinzip der kleinsten Wirkung

Ein Beispiel: Wie bewegt sich ein Teilchen auf einer Stange im Gravitationsfeld? Wir nehmen an, dass das Teilchen sich bei t=0 mit null Geschwindigkeit im Punkt $x = 0, \quad y = L\cos\theta$ befindet. Es gibt kein Reibung.

Wir beginnen mit der Lagrangefunktion in kartesischen Koordinaten.

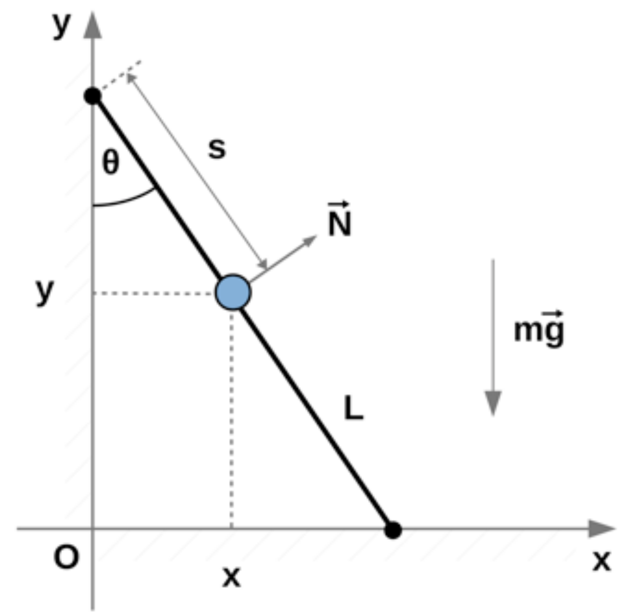
$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{m\dot{y}^2}{2} - mgy$$

$$0 < x < L\sin\theta, \quad 0 < y < L\cos\theta.$$

Die Koordinaten x und y sind nicht unabhängig !

$$x = s\sin\theta, \quad y = L\cos\theta - s\cos\theta$$

$$\boxed{y\sin\theta + x\cos\theta - L\sin\theta\cos\theta = 0}$$



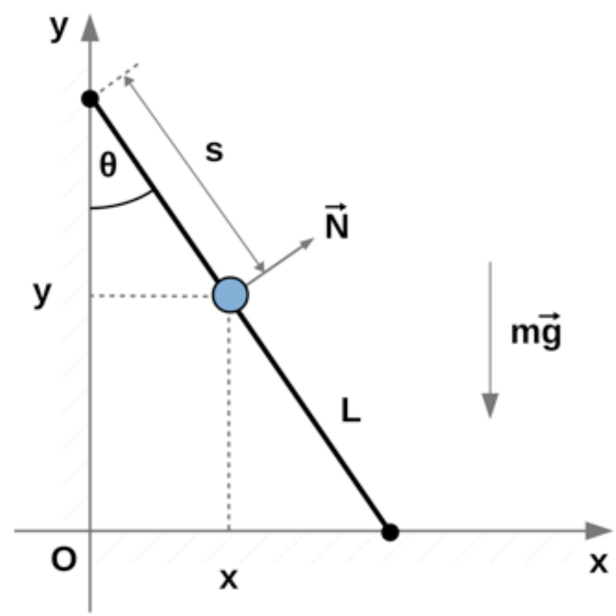

Wir können diese Abhängigkeit entweder los werden oder die Lagrangefaktoren benutzen.

# 1. Prinzip der kleinsten Wirkung

a) Zwangsbedinungen explizit eliminieren. Wir wählen die Länge “s” entlang der Stange als die neue Koordinate.

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{m\dot{y}^2}{2} - mgy$$

$$0 < s < L$$




$$x = s\sin\theta, \quad y = L\cos\theta - s\cos\theta$$

$$\dot{x} = \dot{s}\sin\theta, \quad \dot{y} = -\dot{s}\cos\theta$$

$$\boxed{L = \frac{m\dot{s}^2}{2} - mg(L\cos\theta - s\cos\theta)}$$

$$m\ddot{s} = mg\cos\theta \Rightarrow s(t) = \frac{g\cos\theta}{2}t^2$$

$$x = \frac{g\cos\theta\sin\theta}{2}t^2, \quad y = L\cos\theta - \frac{g\cos^2\theta}{2}t^2$$

# 1. Prinzip der kleinsten Wirkung

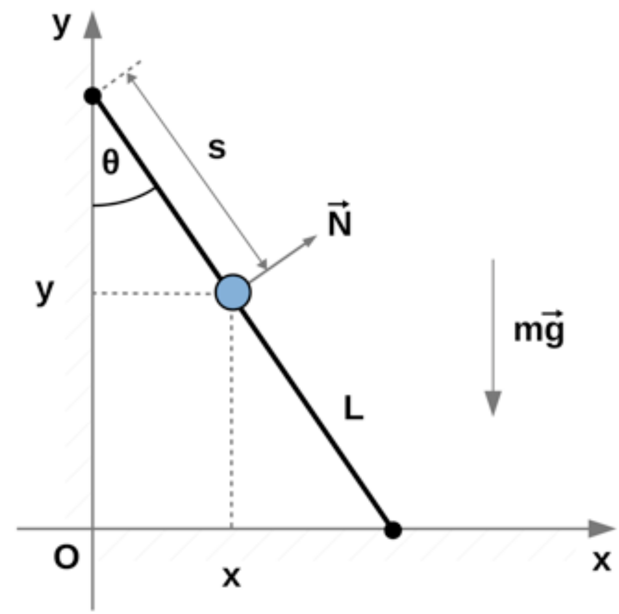
## b). Lagrangefaktoren

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{m\dot{y}^2}{2} - mgy \longrightarrow L = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{m\dot{y}^2}{2} - mgy + \lambda\left(y\sin\theta + x\cos\theta - L\sin\theta\cos\theta\right)$$

$$\boxed{y\sin\theta + x\cos\theta - L\sin\theta\cos\theta = 0}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \longrightarrow \boxed{y\sin\theta + x\cos\theta - L\sin\theta\cos\theta = 0}$$

$$\boxed{m\ddot{x} = \lambda\cos\theta} \qquad \boxed{m\ddot{y} = -mg + \lambda\sin\theta}$$




$$\ddot{y}\sin\theta + \ddot{x}\cos\theta = 0$$

$$m\ddot{y} = -mg - \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}m\ddot{y} \longrightarrow \ddot{y} = -g\cos^2\theta$$

$$\ddot{x} = g\cos\theta\sin\theta \qquad x = \frac{g\cos\theta\sin\theta}{2}\,t^2 \qquad y = L\cos\theta - \frac{g\cos^2\theta}{2}\,t^2$$

# 1. Prinzip der kleinsten Wirkung

## c) Das zweite newtonsche Gesetz.

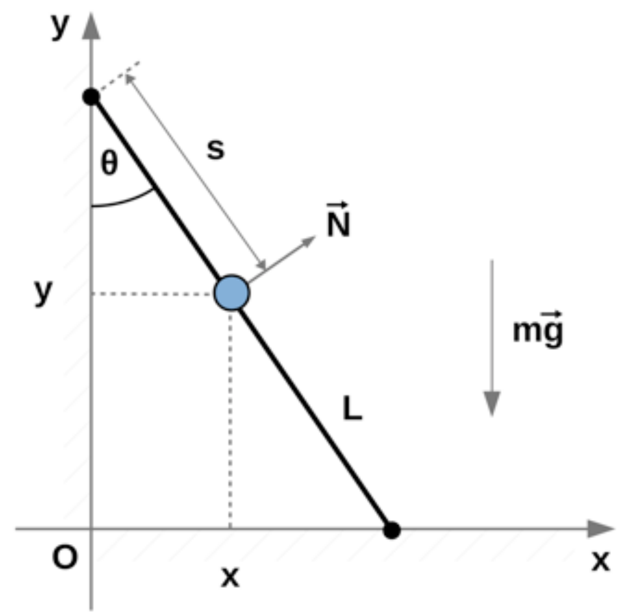
Zwei Kräfte: Die Gravitationskraft und die Zwangskraft.

Die Zwangsskraft wirkt orthogonal zur  Stange, d.h. sie hat keine Komponente entlang der Stange.  Die Komponente der Gravitationskraft entlang der Stange bestimmt die Bewegung des Teilchens.

$$F_{||} = mg\cos\theta$$

$$m\ddot{s} = mg\cos\theta$$

$$s = g\cos\theta\,\frac{t^2}{2}$$



# 1. Prinzip der kleinsten Wirkung

Zwei allgemeine Bemerkungen.

1) Sind die Zwangsbedinungen von Geschwindigkeiten abhängig, muss man die abhangige Grösse aus der Lagrangefunktion eliminieren; Lagrangefaktoren kann man in diesem Fall nicht benutzen.

2) Die Lagrangefunktion eines mechanischen Systems ist nur bis auf die totale Zeitableitung einer beliebigen Funktion von verallgemeinerten Koordinaten definiert.

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \; L(q, \dot{q}, t), \quad q(t_1) = q_1, \quad q(t_2) = q_2$$

$$L(q, \dot{q}, t) \to L(q, \dot{q}, t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(q, t) \longleftarrow$$

Keine Abhangigkeit von der Geschwindigkeit !

$$S_{\text{new}} = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left( L(q, \dot{q}, t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(q, t) \right) = S + f(q_2, t_2) - f(q_1, t_1)$$

$$\delta S_{\text{new}} = \delta S \longrightarrow$$

Identische Bewegungsgleichungen !

# Wo kommt der Prinzip den kleinsten Wirkung her ?

VOLUME 20, NUMBER 2 APRIL, 1948

## Space-Time Approach to Non-Relativistic Quantum Mechanics

R. P. FEYNMAN

*Cornell University, Ithaca, New York*

Non-relativistic quantum mechanics is formulated here in a different way. It is, however, mathematically equivalent to the familiar formulation. In quantum mechanics the probability of an event which can happen in several different ways is the absolute square of a sum of complex contributions, one from each alternative way. The probability that a particle will be found to have a path $x(t)$ lying somewhere within a region of space time is the square of a sum of contributions, one from each path in the region. The contribution from a single path is postulated to be an exponential whose (imaginary) phase is the classical action (in units of $\hbar$) for the path in question. The total contribution from all paths reaching $x, t$ from the past is the wave function $\psi(x, t)$. This is shown to satisfy Schroedinger's equation. The relation to matrix and operator algebra is discussed. Applications are indicated, in particular to eliminate the coordinates of the field oscillators from the equations of quantum electrodynamics.

**Quanten Mechanik: alle Bahnen sind erlaubt und kann auch in der Natur passieren. Die Wahrscheinlichkeiten das ein Bahn verfolgt wird unterscheiden sich aber gewaltig.**

$$\mathcal{P}[q(t)] \sim e^{iS[q(t)]/\hbar} \qquad \hbar = 1.0545718 \times 10^{-34} m^2 kg/s$$

# 2. Erhältungssätze

Zeitunabhängige Funktionen von Koordinaten und Geschwindigkeiten des Systems und auch von der Zeit, heissen Bewegungsintegrale.

$$I \equiv I(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}, t) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = 0$$

$$\boxed{\begin{gathered} q(t)^2 + \dot{q}(t)^2 = I_1, \quad q(t)^2 - \dot{q}(t)^2 = I_2 \\ (q(t), \dot{q}(t)) = \sqrt{\frac{I_1 \pm I_2}{2}} \end{gathered}}$$

Ein Beispiel: Zeitunabhängige Lagrangefunktion $L = L(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\})$

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \sum \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i \qquad \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \sum \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\dot{q}_i + \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i = \sum \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L\right) = 0.}$$

Diese Grösse nennt man die Energie des Systems: $E = \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L$

$$L = T - U(\{q_i\}), \quad T = \frac{1}{2}\sum m_{\alpha\beta}(\{q_i\})\dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta \quad \Rightarrow \quad E = T + U$$

Falls ein mechanisches System durch eine zeitunabhängige Lagrangefunktion beschrieben wird, ist für dieses System die Energie eine erhaltende Grösse.