

Zusammenfassung

1. Hamiltonsche Mechanik und die hamiltonschen Gleichungen

$$H(\{q\}, \{p\}, t) = \sum_{i=1}^N p_i \dot{q}_i - L \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}.$$

2. Poisson-Klammern. Eigenschaften:

$$\{F, G\} = \sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} - \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} \right] \quad \{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0, \quad \{p_i, q_j\} = \delta_{ij}$$

$$\{F_1, F_2\} = -\{F_2, F_1\} \quad \{F_1 + F_2, F_3\} = \{F_1, F_3\} + \{F_2, F_3\}$$

$$\{F_1 F_2, F_3\} = F_1 \{F_2, F_3\} + F_2 \{F_1, F_3\}$$

$$\{F_1, \{F_2, F_3\}\} + \{F_2, \{F_3, F_1\}\} + \{F_3, \{F_1, F_2\}\} = 0$$

3. Falls eine Funktion $I(p, q)$ explizit zeitunabhängig ist und die Poisson-Klammer für $I(q, p)$ und die Hamilton-Funktion Null ist, dann ist $I(p, q)$ ein Bewegungsintegral.

$$\left. \frac{\partial F(q, Q, t)}{\partial q} \right|_Q = p,$$

$$-\left. \frac{\partial F(q, Q, t)}{\partial Q} \right|_q = P,$$

$$K = H + \frac{\partial F}{\partial t}$$

4. Kanonische Transformationen. Erzeugende Funktion

$$Q = Q(q, p, t), \quad P = P(q, p, t) \quad \dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P}, \quad \dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q}$$

6. Hamiltonsche Gleichungen

Eine wichtige Eigenschaft der kanonischen Transformationen ist, dass diese Transformationen die Poisson-Klammern invariant lassen. Wir werden diesen Satz für eindimensionale Systeme prüfen:

$$\{F_1, F_2\}_{p,q} = \{F_1, F_2\}_{P,Q}$$

Wir fangen mit der Poisson-Klammer für eine Koordinate und einen Impuls an:

$$p = \left. \frac{\partial F}{\partial q} \right|_Q, \quad P = - \left. \frac{\partial F}{\partial Q} \right|_q$$

$$dF = \frac{\partial F}{\partial Q} dQ + \frac{\partial F}{\partial q} dq + \frac{\partial F}{\partial t} dt$$

$$\{Q, P\}_{Q,P} = -1 \quad \{Q, P\}_{p,q} = \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial q} - \frac{\partial P}{\partial p} \frac{\partial Q}{\partial q} \quad \left. \frac{\partial P}{\partial q} \right|_p = - \frac{\partial^2 F}{\partial Q \partial Q} \left. \frac{\partial Q}{\partial q} \right|_p - \frac{\partial^2 F}{\partial Q \partial q}$$

$$\{Q, P\}_{p,q} = \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial q} - \frac{\partial P}{\partial p} \frac{\partial Q}{\partial q} = \frac{\partial Q}{\partial q} \left[- \frac{\partial^2 F}{\partial Q^2} \frac{\partial Q}{\partial p} - \frac{\partial P}{\partial p} \right] - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial F}{\partial Q \partial q}$$

$$\left. \frac{\partial P}{\partial p} \right|_q = - \frac{\partial^2 F}{\partial Q^2} \frac{\partial Q}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial Q \partial q} \left. \frac{\partial q}{\partial p} \right|_q = - \frac{\partial^2 F}{\partial Q^2} \frac{\partial Q}{\partial p} \quad \rightarrow \quad - \frac{\partial^2 F}{\partial Q^2} \frac{\partial Q}{\partial p} - \frac{\partial P}{\partial p} = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial F}{\partial Q \partial q} = 1 \quad 1 = \frac{\partial p}{\partial p} = \frac{\partial F}{\partial q^2} \frac{\partial q}{\partial p} + \frac{\partial F}{\partial Q \partial q} \frac{\partial Q}{\partial p} = \frac{\partial F}{\partial Q \partial q} \frac{\partial Q}{\partial p}$$

$$\{Q, P\}_{p,q} = -1 = \{Q, P\}_{Q,P}$$

6. Hamiltonsche Gleichungen

Eine wichtige Eigenschaft der kanonischen Transformationen ist, dass diese Transformationen die Poisson-Klammern invariant lassen. Wir werden diesen Satz für eindimensionale Systeme prüfen:

$$\{F_1, F_2\}_{p,q} = \{F_1, F_2\}_{P,Q}$$

Wir fangen mit der Poisson-Klammer für eine Koordinate und einen Impuls an:

$$p = \left. \frac{\partial F}{\partial q} \right|_Q, \quad P = - \left. \frac{\partial F}{\partial Q} \right|_q$$

$$dF = \frac{\partial F}{\partial Q} dQ + \frac{\partial F}{\partial q} dq + \frac{\partial F}{\partial t} dt$$

$$\{Q, P\}_{Q,P} = -1 \quad \{Q, P\}_{p,q} = \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial q} - \frac{\partial P}{\partial p} \frac{\partial Q}{\partial q} \quad \left. \frac{\partial P}{\partial q} \right|_p = - \frac{\partial^2 F}{\partial Q \partial Q} \left. \frac{\partial Q}{\partial q} \right|_p - \frac{\partial^2 F}{\partial Q \partial q}$$

$$\{Q, P\}_{p,q} = \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial q} - \frac{\partial P}{\partial p} \frac{\partial Q}{\partial q} = \frac{\partial Q}{\partial q} \left[- \frac{\partial^2 F}{\partial Q^2} \frac{\partial Q}{\partial p} - \frac{\partial P}{\partial p} \right] - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial F}{\partial Q \partial q}$$

$$\left. \frac{\partial P}{\partial p} \right|_q = - \frac{\partial^2 F}{\partial Q^2} \frac{\partial Q}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial Q \partial q} \left. \frac{\partial q}{\partial p} \right|_q = - \frac{\partial^2 F}{\partial Q^2} \frac{\partial Q}{\partial p} \quad \rightarrow \quad - \frac{\partial^2 F}{\partial Q^2} \frac{\partial Q}{\partial p} - \frac{\partial P}{\partial p} = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial F}{\partial Q \partial q} = 1 \quad 1 = \frac{\partial p}{\partial p} = \frac{\partial F}{\partial q^2} \frac{\partial q}{\partial p} + \frac{\partial F}{\partial Q \partial q} \frac{\partial Q}{\partial p} = \frac{\partial F}{\partial Q \partial q} \frac{\partial Q}{\partial p}$$

$$\{Q, P\}_{p,q} = -1 = \{Q, P\}_{Q,P}$$

6. Hamiltonische Gleichungen

Die Poisson-Klammern sind invariant unter kanonischen Transformationen

$$\{F_1, F_2\}_{p,q} = \{F_1, F_2\}_{P,Q}$$

$$F_{1,2} = F_{1,2}(Q, P, t)$$

$$\begin{aligned}\{F_1, F_2\} &= \frac{\partial F_1}{\partial p} \frac{\partial F_2}{\partial q} - \frac{\partial F_1}{\partial q} \frac{\partial F_2}{\partial p} \\ \frac{\partial F_2}{\partial q} &= \frac{\partial F_2}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial q} + \frac{\partial F_2}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial q}, \\ \frac{\partial F_2}{\partial p} &= \frac{\partial F_2}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial p} + \frac{\partial F_2}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial p}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\{F_1, F_2\} &= \frac{\partial F_1}{\partial p} \left(\frac{\partial F_2}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial q} + \frac{\partial F_2}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial q} \right) - \frac{\partial F_1}{\partial q} \left(\frac{\partial F_2}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial p} + \frac{\partial F_2}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial p} \right) \\ &= \frac{\partial F_2}{\partial Q} \left(\frac{\partial F_1}{\partial p} \frac{\partial Q}{\partial q} - \frac{\partial F_1}{\partial q} \frac{\partial Q}{\partial p} \right) + \frac{\partial F_2}{\partial P} \left(\frac{\partial F_1}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial q} - \frac{\partial F_1}{\partial q} \frac{\partial P}{\partial p} \right) \\ &= \frac{\partial F_2}{\partial Q} \{F_1, Q\} + \frac{\partial F_2}{\partial P} \{F_1, P\}\end{aligned}$$

Diese Ausdrücke noch ein Mal verwenden, mit $F_2 \rightarrow F_1$

$$\begin{aligned}\{F_1, Q\} &= \frac{\partial F_1}{\partial P} \{P, Q\} = \frac{\partial F_1}{\partial P} \\ \{F_2, P\} &= \frac{\partial F_2}{\partial Q} \{Q, P\} = -\frac{\partial F_2}{\partial Q}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\{F_1, F_2\}_{q,p} &= \frac{\partial F_2}{\partial Q} \{F_1, Q\} + \frac{\partial F_2}{\partial P} \{F_1, P\} \\ &= \frac{\partial F_1}{\partial P} \frac{\partial F_2}{\partial Q} - \frac{\partial F_1}{\partial Q} \frac{\partial F_2}{\partial P} = \{F_1, F_2\}_{Q,P}\end{aligned}$$

6. Hamiltonsche Gleichungen

Ein Beispiel: Harmonischer Oszillator

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{m\omega^2 x^2}{2}, \quad H = \dot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - L = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}$$

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}$$

Wir führen neue Variablen ein
und wollen wissen ob diese
Variablen kanonisch sind.

$$a = \frac{m\omega x + ip}{\sqrt{2m\omega}} e^{i\omega t}, \quad a^+ = \frac{m\omega x - ip}{\sqrt{2m\omega}} e^{-i\omega t}.$$

$$\frac{\partial a}{\partial x} = \frac{m\omega}{\sqrt{2m\omega}} e^{i\omega t}, \quad \frac{\partial a}{\partial p} = \frac{i}{\sqrt{2m\omega}} e^{i\omega t}$$
$$\frac{\partial a^+}{\partial x} = \frac{m\omega}{\sqrt{2m\omega}} e^{-i\omega t}, \quad \frac{\partial a^+}{\partial p} = \frac{-i}{\sqrt{2m\omega}} e^{-i\omega t}$$

$$\{a, a^+\} = \frac{\partial a}{\partial p} \frac{\partial a^+}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial a^+}{\partial p} = \frac{im\omega}{2m\omega} + \frac{i\omega\omega}{2m\omega} = i$$

$$\underline{a = Q, \quad ia^+ = P} \Rightarrow \{P, Q\} = \{ia^+, a\} = i\{a^+, a\} = 1.$$

6. Hamiltonsche Gleichungen

Wir finden dann die erzeugende Funktion

$$a = \frac{m\omega x + ip}{\sqrt{2m\omega}} e^{i\omega t}, \quad a^+ = \frac{m\omega x - ip}{\sqrt{2m\omega}} e^{-i\omega t}.$$

Per Definition gilt:

$$p = \frac{\partial F(x, Q, t)}{\partial x}, \quad P = -\frac{\partial F(x, Q, t)}{\partial Q} \quad Q = a, \quad P = ia^+$$

Wir integrieren über x. Die "Integrationskonstante" ist eine Funktion von Q und t.

$$p = im\omega x - ie^{-i\omega t} \sqrt{2m\omega} Q = \frac{\partial F}{\partial x} \quad \longrightarrow \quad F(x, Q, t) = \frac{im\omega x^2}{2} - ie^{-i\omega t} \sqrt{2m\omega} Q x + \tilde{F}(Q, t)$$

$$\frac{\partial F}{\partial Q} = -ie^{-i\omega t} \sqrt{2m\omega} x + \frac{d\tilde{F}}{dQ} = -P \quad \longleftrightarrow \quad P = i\sqrt{2m\omega} x e^{-i\omega t} - iQ e^{-2i\omega t}$$

$$\frac{d\tilde{F}}{dQ} = iQ e^{-2i\omega t} \Rightarrow \tilde{F} = \frac{iQ^2}{2} e^{-2i\omega t}$$

$$F(x, Q) = \frac{im\omega}{2} x^2 + \frac{iQ^2}{2} e^{-2i\omega t} - iQ x e^{-i\omega t} \sqrt{2m\omega}$$

Wir berechnen dann die neue Hamilton-Funktion und bekommen eine Null. D.h. die neue Koordinate und der neue Impuls sind Konstanten.

$$K = H + \frac{\partial F}{\partial t} = H + \omega Q^2 e^{-2i\omega t} - Q x \omega \sqrt{2m\omega} e^{-i\omega t}$$

$$\omega Q^2 e^{-2i\omega t} - Q x \omega \sqrt{2m\omega} e^{-i\omega t} = i\omega Q P$$

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} = \frac{(m\omega x + ip)(m\omega x - ip)}{2m} = \omega a a^+ = -i\omega Q P$$

$$K = 0$$

6. Hamiltonsche Gleichungen

In dem Moment wo wir die Zeitabhängigkeit von Q und P kennen, können wir $x(t)$ bestimmen.

$$a = \frac{m\omega x + ip}{\sqrt{2m\omega}} e^{i\omega t}, \quad a^+ = \frac{m\omega x - ip}{\sqrt{2m\omega}} e^{-i\omega t}.$$

$$K = 0 \Rightarrow Q(t) = Q_0, \quad P(t) = P_0 \qquad Q = a, \quad P = ia^+$$

$$x = \frac{\sqrt{m\omega}}{2} (Q_0 e^{-i\omega t} - iP_0 e^{i\omega t}), \quad -iP_0 = Q_0^* \quad Q_0 = |Q_0| e^{i\phi_0}$$

$$x = \frac{\sqrt{m\omega}}{2} |Q_0| \cos(\omega t + \phi_0)$$

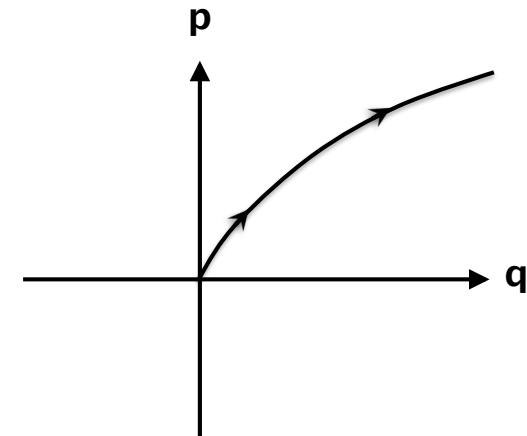
6. Hamiltonischen Gleichungen

Der Phasenraum: Der $2n$ -dimensionale Raum $\{q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n\}$ in dem jeder Punkt einem möglichen Zustand des Systems entspricht, nennt man Phasenraum. Die Zeitentwicklung des Systems ist eine Kurve im Phasenraum.

Bewegung mit konstanter Beschleunigung: Zeitentwicklung entspricht einer Parabel im Phasenraum.

$$v = at, \quad p = m a t, \quad q = \frac{at^2}{2}$$

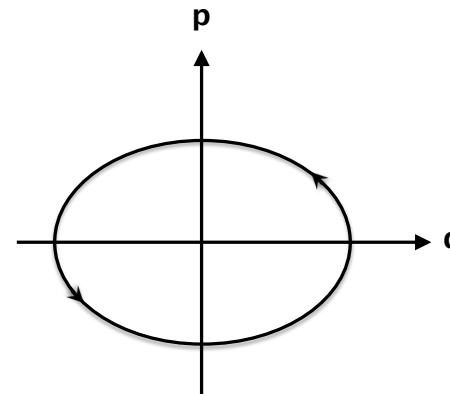
$$p(t) = \sqrt{2am^2 q(t)}$$



Harmonischer Oszillator : Zeitentwicklung entspricht einer Ellipse im Phasenraum.

$$q = A \cos(\omega t + \phi), \quad \dot{q} = -A\omega \sin(\omega t + \phi), \quad p = m\dot{q} = -Am\omega \sin(\omega t + \phi)$$

$$\frac{q(t)^2}{A^2} + \frac{p(t)^2}{A^2 m^2 \omega^2} = 1$$



6. Hamiltonsche Gleichungen

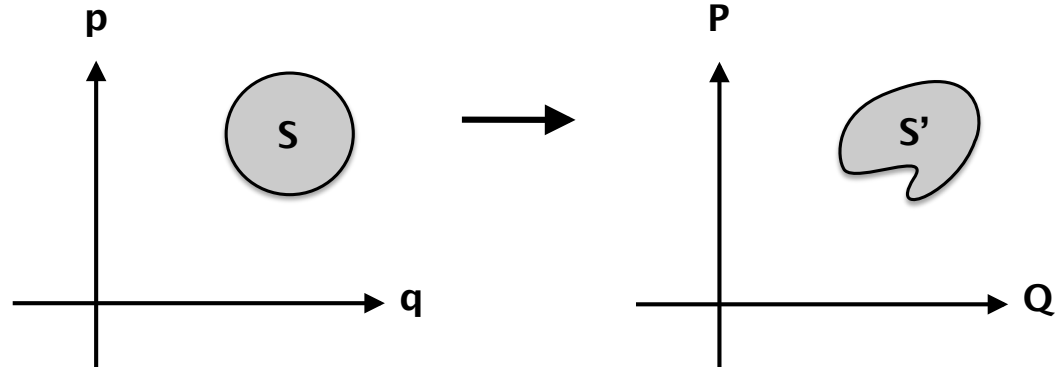
Volumen im Phasenraum sind invariant unter kanonischen Transformationen.

Wir beweisen diese Behauptung für den eindimensionalen Fall.

$$V = \int_S dp \, dq \quad (p, q) \rightarrow (P, Q)$$

$$S \rightarrow S'$$

$$\int_{S'} dP dQ = V'$$



$$\int_S dp \, dq = \int_{S'} J \, dP dQ \quad \Rightarrow \quad J = \frac{\partial(p, q)}{\partial(P, Q)} \quad J = \frac{\partial(p, q)}{\partial(P, Q)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial p}{\partial P} & \frac{\partial q}{\partial P} \\ \frac{\partial p}{\partial Q} & \frac{\partial q}{\partial Q} \end{vmatrix}$$

$$J = \frac{\partial p}{\partial P} \frac{\partial q}{\partial Q} - \frac{\partial p}{\partial Q} \frac{\partial q}{\partial P} = \{p, q\}_{Q, P} = \{p, q\} = 1$$

$$V = \int_S dp dq = \int_{S'} dP dQ = V'$$

6. Hamiltonsche Gleichungen

Die **Zeitentwicklung** eines Systems können wir als **kanonische Trasformation** betrachten.

Wir betrachten die Wirkung als Funktion von Koordinaten, die ein Teilchen in gegebener Zeit erreicht. In diesem Fall, ist die Wirkung entlang einer physikalischen Trajektorie berechnet.

$$\begin{aligned}
 \delta S &= \int_{t_0}^t dt \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) = \int_{t_0}^t dt \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d}{dt} [\delta q] \right) & S &= \int_{t_0}^t L(q, \dot{q}, t) dt \\
 &= \int_{t_0}^t dt \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right] - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right] \delta q \right) & & \\
 &= p \delta q \Big|_{t_0}^t + \int_{t_0}^t dt \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right] \delta q \right) = p \delta q(t) & \xrightarrow{\text{Physikalische Bahn}} & \boxed{\frac{\partial S}{\partial q(t)} \Big|_t = p(t)}
 \end{aligned}$$

$q(t), t$
 q_0, t_0

Zusätzlich, brauchen wir die Abhängigkeit der Wirkung von der Zeit

$$\frac{dS}{dt} = L \Rightarrow \frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial q(t)} \dot{q}(t) = \frac{\partial S}{\partial t} + p(t) \dot{q}(t) \xrightarrow{\quad} \boxed{\frac{\partial S}{\partial t} = L - p\dot{q} = H(t)}$$

$$\boxed{dS = p dq - H dt \xrightarrow{\quad} dS = p_{t_2} dq_{t_2} - p_{t_1} dq_{t_1} - H_{t_2} dt_2 + H_{t_1} dt_1}$$

6. Hamiltonsche Gleichungen

Zeitentwicklungen als kanonische Transformation:

$$\{p(t), q(t)\} \Rightarrow \{p(t + \tau), q(t + \tau)\} \quad dS = p_{t_2} dq_{t_2} - p_{t_1} dq_{t_1} - H_{t_2} dt_2 + H_{t_1} dt_1$$

$$q(t + \tau) = Q(q(t), p(t), t, \tau), \quad p(t + \tau) = P(q(t), p(t), t, \tau)$$

$$t_2 = t + \tau, \quad t_1 = t;$$

$$dS = p_{t+\tau} dq_{t+\tau} - p_t dq_t - (H_{t+\tau} - H_t) dt$$

$$dt_2 = dt_1 = dt$$

$$p_{t+\tau} = \frac{\partial S}{\partial q_{t+\tau}}, \quad p_t = -\frac{\partial S}{\partial q_t}, \quad H_t - H_{t+\tau} = \frac{\partial S}{\partial t}$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial F(q, Q, t)}{\partial q} \right|_Q &= p, \\ -\left. \frac{\partial F(q, Q, t)}{\partial Q} \right|_q &= P, \\ K &= H + \frac{\partial F}{\partial t} \end{aligned}$$

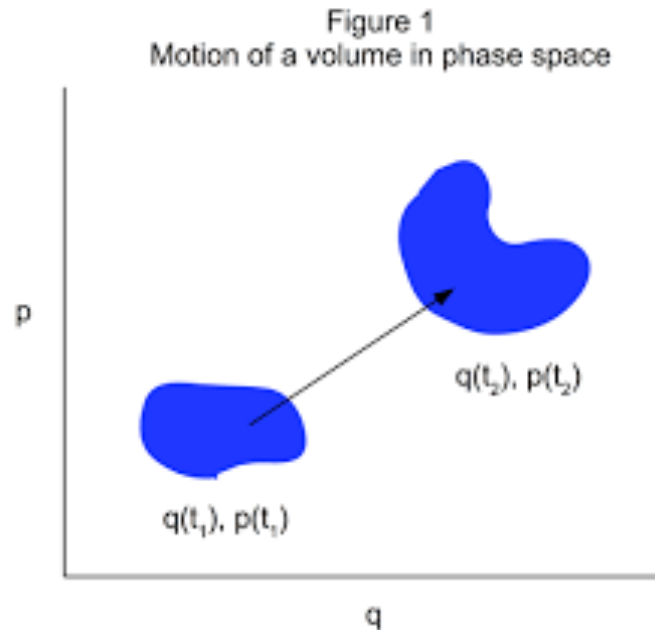
Es folgt das $-S$ (minus Wirkung) die erzeugende Funktion ist.

6. Hamiltonsche Gleichungen

Der Satz von Liouville: das Volumen eines Gebiets des Phasenraums ist zeitunabhängig

$$V = \int_S dp dq$$

$$V(t_2) = V(t_1)$$



Der Satz von Liouville Satz erfolgt aus:

- 1) V ist invariant unter kanonischen Transformationen;
- 2) Die Zeitentwicklung eines Systems ist eine kanonische Transformation.

Der Satz von Liouville gilt auch für mechanische Systeme mit vielen Freiheitsgraden wo das Phasenraumvolumen so definiert ist

$$V = \int dp_1 dp_2 \dots dp_n \dots dq_1 \dots dq_n$$