

Theorie B: Klassische Mechanik

Kirill Melnikov

TTP KIT

Einführung

Alle Informationen zu dieser Veranstaltung finden Sie auf

<http://www.ttp.kit.edu/courses/ss2018/theob/start>

Vorlesungen: Freitags, 9.45-11.15

Saalübungen; Montags, Lehmann Hörsaal, 17.30-19.00

Übungen : Dienstags

Übungsblatterabgabe: Freitags, 9.30 (Rückgabe am Dienstags während der Übungen)

Wichtig!

Bitte registrieren Sie sich bis Sonntag 22.04.2018 auf obiger Webseite für die Übungsgruppen!

Nächste Woche finden alle Übungen statt. Wir werden über das Übungsblatt 0 (mathematische Grundlagen) reden. Bitte bis Dienstag herunterladen und anschauen.

Nächste Freitag 27.04.2018 sollen Sie dann das Übungsblatt 1 abgeben.

Weil Dienstag 01.05.2018 ein Feiertag ist, fallen die Übungen aus. Deswegen, werden wir die Lösungen des Übungsblatts 1 am Montag, 30.04.2018, während der Saalübung besprechen.

Einführung

Die Themen

- 1) Prinzip der kleinsten Wirkung
- 2) Erhaltungssätze
- 3) Eindimensionale Bewegung
- 4) Dreidimensionale Bewegung
- 5) Streuung
- 6) Kleine Schwingungen
- 7) Die Hamiltonschen Gleichungen
- 8) Bewegung des starren Körpers

Einführung

Literaturhinweise:

- L.D. Landau and E.M. Lifschitz, Lehrbuch der Theoretischen Physik I, Mechanik
- H. Goldstein, Klassische Mechanik, Wiley-VCH
- W. Greiner Klassische Mechanik I und II, Verlag Harri Deutsch
- T. Fliessbach, Mechanik, Spektrum Akademischer Verlag

Es gibt kein Skript aber die Slides können Sie von Kurswebseite herunterladen.

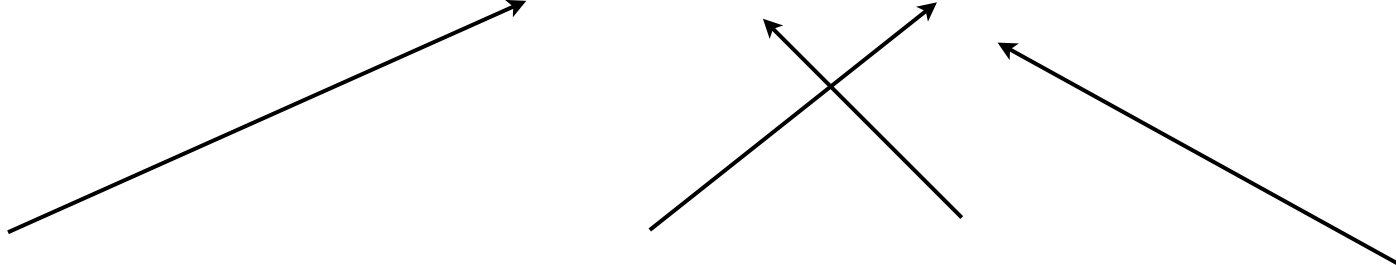
1. Prinzip der kleinsten Wirkung

1. Prinzip der kleinsten Wirkung

Mechanik: Untersuchung der Bewegung des Körpers in externen Feldern

Wichtige Begriffe: **Massenpunkt = Teilchen** (ein Körper, dessen Ausmasse für bestimmte Zwecke vernachlässigt werden können)

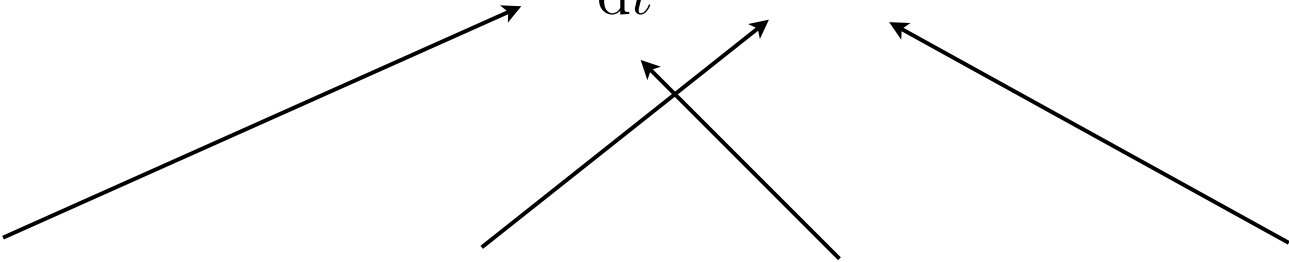
Zweites newtonisches Gesetz

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}(\vec{r})$$
A diagram consisting of four arrows. One arrow points from the word 'Masse' in the text below to the 'm' in the equation. Another arrow points from 'Ortvektor' to the 'r' in the vector r. A third arrow points from 'Beschleunigung' to the second derivative term. A fourth arrow points from 'Kraft' to the 'F' in the vector F.

Die Masse des Teilchens, der Ortvektor, die Beschleunigung, die Kraft.

1. Prinzip der kleinsten Wirkung

Zweites newtonisches Gesetz

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}(\vec{r})$$


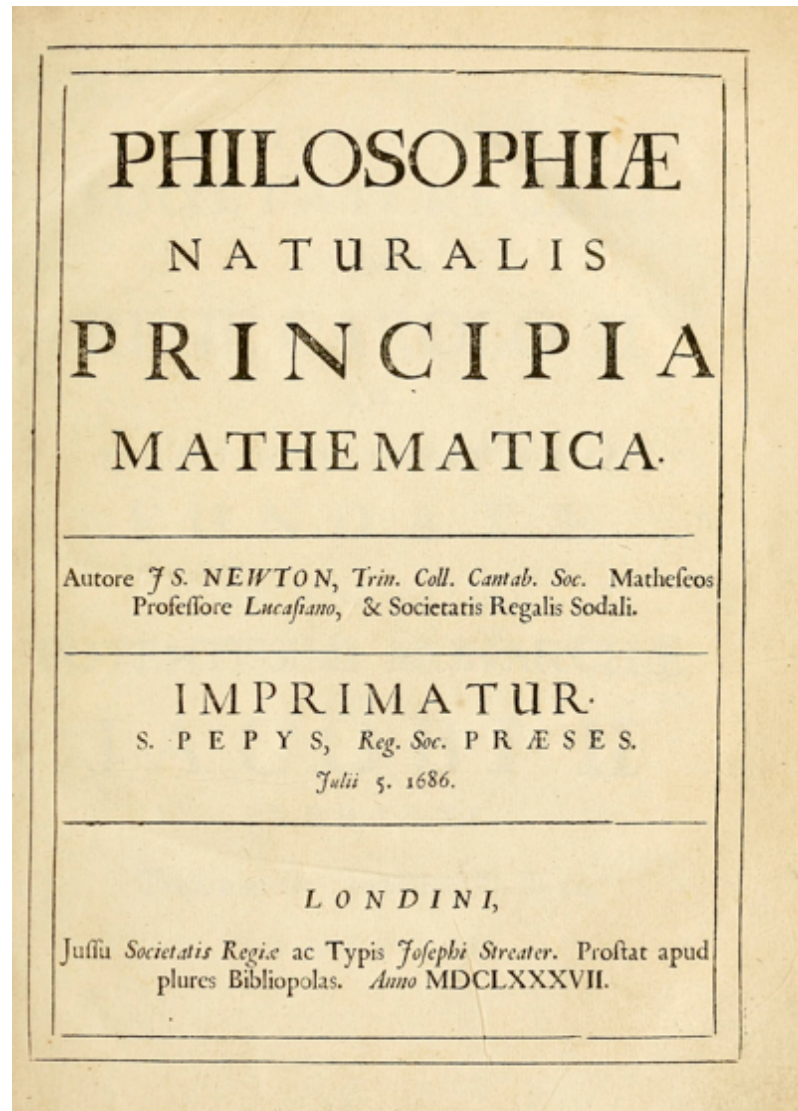
Die Masse des Teilchens, der Ortsvektor, die Beschleunigung, die Kraft.

Um die Differenzialgleichung lösen zu können, brauchen wir **die Randbedingungen**.

Weil das zweite newtonische Gesetz einer Differenzialgleichung zweiter Ordnung entspricht, brauchen wir **zwei Randbedingungen** um die Bahn des Teilchens vollständig zu bestimmen.

Z.B. der Ortsvektor und die Geschwindigkeit eines Teilchens an einem Zeitpunkt oder die Ortsvektoren an zwei Zeitpunkten etc.

Wo kommt das newtonische Gesetz her ?



1. Prinzip der kleinsten Wirkung

Für jedes mechanische System existiert eine **Lagrangefunktion** L

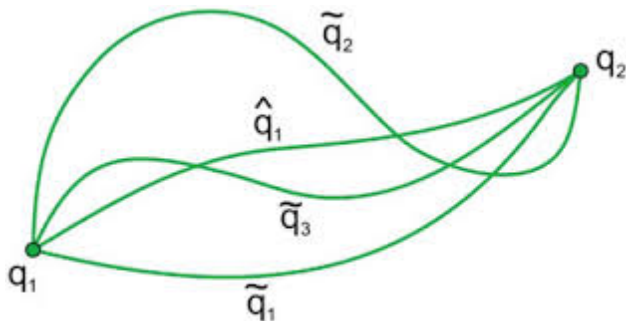
$$L = L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \qquad \dot{\vec{r}} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Integriert man eine Lagrangefunktion über die Zeit, bekommt man **die Wirkung**

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \, L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t). \qquad \vec{r}(t_1) = \vec{r}_A, \quad \vec{r}(t_2) = \vec{r}_B$$

Die Wirkung ist eine Funktion der Zeit, des Anfangspunkts und des Endpunkts, aber auch von der gesamten Bahn des Teilchens.

Eine Funktion (S) von einer Funktion ($r(t)$) heisst **Funktional**.



$$S = S[\vec{r}(t)].$$

1. Prinzip der kleinsten Wirkung

Prinzip der kleinsten Wirkung: Ein mechanisches System bewegt sich so, dass der Wert der Wirkung minimal ist.

Wie findet man ein Minimum der Wirkung? Erinnern wir uns an die Funktionen..

$$f(x + \delta x) = f(x) + \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \delta x^2 + \dots \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x} = 0$$

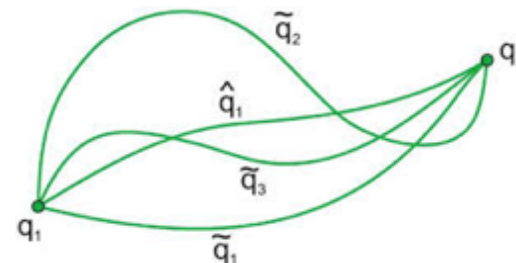
$$f(\vec{x} + \delta \vec{x}) - f(\vec{x}) = \begin{cases} \mathcal{O}(\delta \vec{x}) & \text{generel} \\ \mathcal{O}((\delta \vec{x})^2) & \text{falls } \vec{x} \text{ ein Minimum ist} \end{cases}$$

Wir vergleichen die Wirkungen der zwei unterschiedlichen Bahnen und fordern dass die "lineare" Abhängigkeit der Differenz der Wirkungen vom Unterschied der Bahnen verschwindet.

Wichtig ! Der Anfangspunkt und der Endpunkt bleiben gleich für alle Bahnen.

$$S[\vec{r}_A(t)] \quad <> \quad S[\vec{r}_B(t)], \quad \vec{r}_A(t_1) = \vec{r}_B(t_1) = \vec{r}_1, \quad \vec{r}_A(t_2) = \vec{r}_B(t_2) = \vec{r}_2$$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \, L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t).$$



1. Prinzip der kleinsten Wirkung

Um zwei Wirkungen zu vergleichen, schreiben wir

$$\vec{r}_A(t) = \vec{r}(t), \quad \vec{r}_B(t) = \vec{r}(t) + \delta\vec{r}(t), \quad \delta\vec{r}(t_1) = \delta\vec{r}(t_2) = 0$$

$$\delta S = S[\vec{r}_B(t)] - S[\vec{r}_A(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[L(\vec{r} + \delta\vec{r}, \dot{\vec{r}} + \delta\dot{\vec{r}}, t) - L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \right]$$

Wir entwickeln den Integrand in der Variation der Bahn $\delta\vec{r}$; dabei betrachten wir den Ortsvektor und die Geschwindigkeit als zwei unabhängige Größen

$$L(\vec{r} + \delta\vec{r}, \dot{\vec{r}} + \delta\dot{\vec{r}}, t) \approx L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial L}{\partial r_i} \delta r_i + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} \delta \dot{r}_i + \mathcal{O}(\delta r^2)$$

$$\begin{aligned} \delta S &= \sum_{i=1}^3 \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial L}{\partial r_i} \delta r_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} \delta \dot{r}_i \right] \\ &\quad \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} \delta \dot{r}_i = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} \frac{d\delta r_i}{dt} = \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} \delta r_i \right] - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} \right] \delta r_i \right\} \\ &\quad \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} \delta r_i \right] = \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} \delta r_i \right|_{t_1}^{t_2} = 0, \quad \delta r_i(t_{1,2}) = 0 \end{aligned}$$

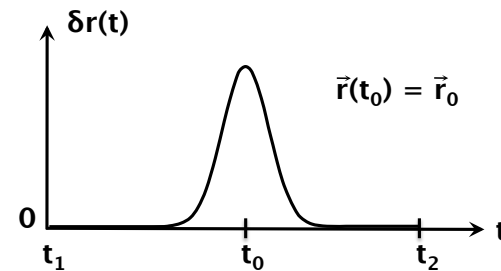
Es folgt die Variation der Wirkung

$$\delta S = \sum_{i=1}^3 \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \frac{\partial L}{\partial r_i} - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} \right] \right\} \delta r_i$$

1. Prinzip der kleinsten Wirkung

Eine Bahn minimiert die Wirkung falls δS für beliebige Variationen der Bahn $\delta \vec{r}$ Null ist.

$$\delta S = \sum_{i=1}^3 \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \frac{\partial L}{\partial r_i} - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} \right] \right\} \delta r_i$$



$$\delta S = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} - \frac{\partial L}{\partial r_i}$$

Es folgen die Euler-Lagrange Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} = \frac{\partial L}{\partial r_i}, \quad i = 1, 2, 3, \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}}$$

1. Prinzip der kleinsten Wirkung

Wir müssen in der Lage sein das zweite newtonische Gesetz aus den Euler-Lagrange Bewegungsgleichungen herzuleiten. Dafür brauchen wir eine Lagrangefunktion.

Falls die Lagrangefunktion durch die Differenz der kinetischen Energie und der potentiellen Energie des Teilchens gegeben ist, sind die Euler-Lagrange Gleichungen und das zweite newtonische Gesetz identisch.

$$L = T - U = \frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2} - U(\vec{r})$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} m\dot{\vec{r}} = m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}).$$

$$\dot{\vec{r}} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \ddot{\vec{r}} \equiv \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = m\dot{\vec{r}}, \quad \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = -\frac{\partial U(\vec{r})}{\partial \vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}),$$

Fall der mehrerer Teilchen

$$L = \sum_{i=1}^N \frac{m_i \dot{\vec{r}}_i^2}{2} - U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N)$$

1. Prinzip der kleinsten Wirkung

Obwohl Euler-Lagrange-Gleichungen und newtonisches Gesetz äquivalent sind, bietet die Lagrangeformulierung der Mechanik sehr wichtige Vorteile an:

- 1) Fast "mechanisch" die Bewegungsgleichungen herleiten zu können, ohne über die Kräfte nachzudenken;
- 2) beliebige (verallgemeinerte) "Koordinaten" wählen zu dürfen um das mechanische System vollständig zu beschreiben; das ist sehr nützlich falls die Bewegung durch Zwangsbedingungen beschränkt ist.
- 3) Die erhaltene (zeitunabhängige) Grösse eines mechanischen Systems viel einfacher erkennen zu können.

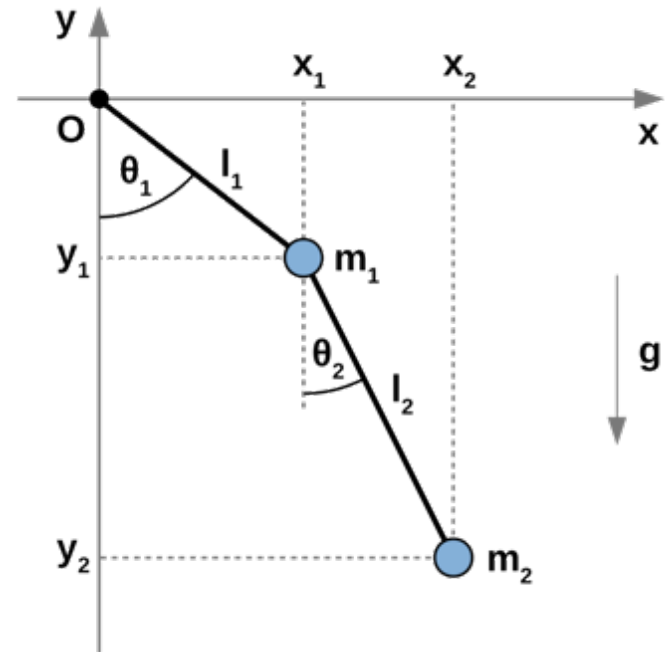
1. Prinzip der kleinsten Wirkung

Ein Beispiel: Zwei unterschiedliche Teilchen, verbunden durch masselose Stangen, im Gravitationsfeld. Wie sehen die Bewegungsgleichungen aus?

Schritt 1: Die Lagrangefunktion in kartesischen Koordinaten

$$L = \frac{m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2)}{2} + \frac{m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)}{2} - U(y_1, y_2)$$

$$U = m_1gy_1 + m_2gy_2$$



Die Lagrangefunktion ist zwar richtig aber nicht nützlich weil die Stangen die Ortsvektoren der Teilchen voneinander abhängig machen.

1. Prinzip der kleinsten Wirkung

$$L = \frac{m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2)}{2} + \frac{m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)}{2} - U(y_1, y_2)$$

$$U = m_1 g y_1 + m_2 g y_2$$

Schritt 2: die Wahl der unabhängigen Koordinaten

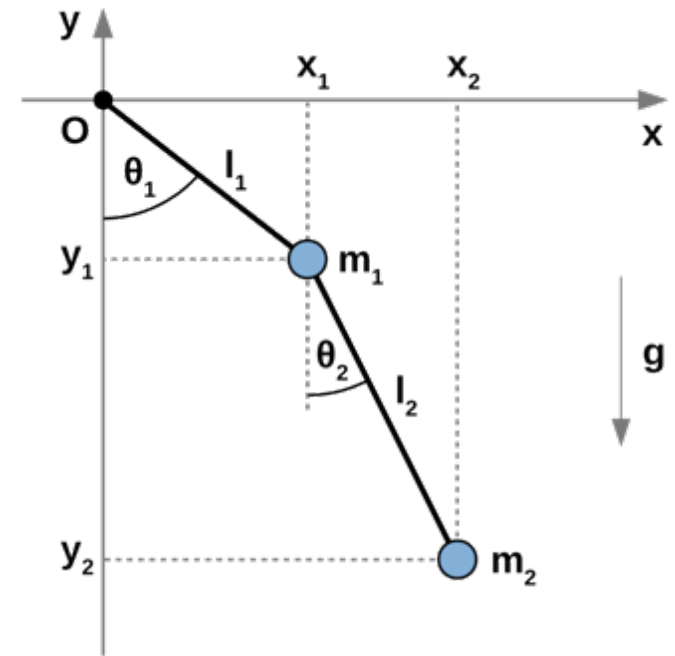
Wir benutzen zwei Winkeln als unabhängige “Koordinaten”.
D.h.

$$x_1 = l_1 \sin \theta_1, \quad x_2 = x_1 + l_2 \sin \theta_2,$$

$$y_1 = -l_1 \cos \theta_1, \quad y_2 = y_1 - l_2 \cos \theta_2$$

$$\dot{x}_1 = l_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1, \quad \dot{x}_2 = \dot{x}_1 + l_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2,$$

$$\dot{y}_1 = l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1, \quad \dot{y}_2 = \dot{y}_1 + l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2$$



$$L = \frac{(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2) \dot{\theta}_1^2}{2} + \frac{m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2}{2} + m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + (m_1 + m_2) g l_1 \cos \theta_1 + m_2 g l_2 \cos \theta_2$$

1. Prinzip der kleinsten Wirkung

$$L = \frac{(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2) \dot{\theta}_1^2}{2} + \frac{m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2}{2} + m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + (m_1 + m_2) g l_1 \cos \theta_1 + m_2 g l_2 \cos \theta_2$$

Schritt 3: Die Ableitungen zu berechnen

Die EL-Bewegungsgleichungen sind dann

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} = \frac{\partial L}{\partial \theta_i}, \quad i = 1, 2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2) \dot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2) \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \left(\cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_2 - \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -m_2 l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - (m_1 + m_2) g l_1 \sin \theta_1$$

