# Klassische Theoretische Physik II

Vorlesung: Prof. Dr. K. Melnikov – Übung: Dr. H. Frellesvig, Dr. R. Rietkerk

## Übungsblatt 7

Ausgabe: 01.06.18 – Abgabe: 08.06.18 before 09:30 – Besprechung: 12.06.18

### Aufgabe 1: Streuung an einer Oberfläche — 5 Punkte

In der Vorlesung haben wir den Wirkungsquerschnitt für die Streuung eines Teilchens an einer massiven Kugel berechnet. In dieser Aufgabe betrachten wir die elastische Streuung von, von $z = +\infty$ mit Anfangsgeschwindigkeit parallel zur $z$-Achse kommenden, Teilchen an einem massiven Objekt, beschrieben durch die Punkte

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \sqrt{x^2 + y^2} \leq b \sin(\tfrac{z}{a}) \text{ and } 0 \leq z \leq \pi a \right\} . \tag{1}$$

Das heißt der Rand des Objektes ist eine Rotationsfläche um die $z$-Achse, welche durch

$$\rho(z) = b \sin\left(\frac{z}{a}\right) \quad \text{für} \quad 0 \leq z \leq \pi a , \tag{2}$$

generiert wird. Die Parameter $a$ und $b$ sind positiv.

(a) Skizzieren Sie die Rotationsfläche. Zeichnen Sie den Pfad eines Teilchens mit Stoßparameter $0 < \rho < b$ und deuten Sie den Streuwinkel $\chi$ an. Zeigen Sie mit Hilfe der Skizze, dass der halbe Streuwinkel mit der Steigung der Fläche zusammenhängt:

$$\tan\left(\frac{\chi}{2}\right) = \frac{d\rho(z)}{dz} . \tag{3}$$

(b) Leiten Sie aus Gleichung (3) das Verhältnis zwischen dem Stossparameter und dem Streuwinkel

$$\rho(\chi) = \sqrt{b^2 - a^2 \tan^2\left(\frac{\chi}{2}\right)} \tag{4}$$

her.

(c) Berechnen Sie den differenziellen Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\chi} = 2\pi\rho(\chi) \left| \frac{d\rho(\chi)}{d\chi} \right| . \tag{5}$$

(d) Was sind die minimalen und maximalen Werte des Streuwinkels, $\chi_{\text{min}}$ und $\chi_{\text{max}}$, welche den Stossparametern $\rho \to b$ und $\rho \to 0$ entsprechen?

(e) Berechnen Sie den totalen Wirkungsquerschnitt

$$\sigma = \int_{\chi_{\text{min}}}^{\chi_{\text{max}}} d\chi \, \frac{d\sigma}{d\chi} . \tag{6}$$

Können Sie das einfache Ergebnis für $\sigma$ geometrisch begründen?

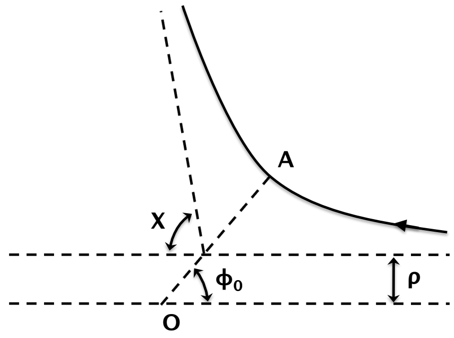


Abbildung 1: Definition des Stossparameters $\rho$, Streuwinkels $\chi$ und Winkels $\phi_0$ in Aufgabe 2.

**Aufgabe 2: Streuung am $1/r^2$ Potenzial** **5 Punkte**

In der Vorlesung wurde die Streuung an einem Coulomb-Potenzial $U(r) = \pm\alpha/r$ besprochen und die berühmte Rutherfordformel

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\alpha}{4E}\right)^2 \frac{1}{\sin^4(\chi/2)} \ , \tag{1}$$

hergleitet, wobei $d\Omega = 2\pi \sin(\chi) d\chi$ ist. In dieser Aufgabe berechnen wir den Wirkungsquerschnitt für die Streuung an einem stärker lokalisierten, abstoßenden Potenzial,

$$U(r) = \alpha/r^2 \ \text{ with } \ \alpha > 0 \ . \tag{2}$$

Der Streuwinkel ist durch $\chi = |\pi - 2\phi_0|$ gegeben, wobei

$$\phi_0 = \int_{r_{\min}}^{\infty} dr \, \frac{\rho/r^2}{\sqrt{1 - \rho^2/r^2 - U(r)/E}} \ . \tag{3}$$

Die untere Grenze $r_{\min}$ ist gleich dem Abstand zwischen dem Ursprung und dem Wendepunkt $A$, siehe Abbildung 1.

(a) Geben Sie die Definition für $r_{\min}$ an. Zeigen Sie, dass in diesem Fall $r_{\min} = \sqrt{\rho^2 + \alpha/E}$.

(b) Führen Sie das Integral in Gleichung (3) aus und zeigen Sie, dass ein Teilchen mit Energie $E$ und Stossparameter $\rho$ mit dem Winkel

$$\chi = \pi \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha/(E\rho^2)}}\right) \ , \tag{4}$$

abgelenkt wird.

(c) Invertieren Sie Gleichung (4) um $\rho = \rho(\chi)$ zu bestimmen. Zeigen Sie, dass der differenzielle Wirkungsquerschnitt, definiert in Gleichung (5) in der vorherigen Aufgabe, durch

$$\frac{d\sigma}{d\chi} = \frac{2\pi^3\alpha}{E} \frac{\pi - \chi}{\chi^2(2\pi - \chi)^2} \ , \tag{5}$$

gegeben ist.

(d) Skizzieren Sie den differenziellen Wirkungsquerschnitt als Funktion von $\chi$ zwischen $\chi = 0$ und $\chi = \pi$. Was ist die Funktion für $\chi \to 0$? Ist der totale Wirkungsquerschnitt endlich oder divergent?

## Aufgabe 3: Teilcheneinfang **10 Punkte**

In dieser Aufgabe sind wir an einem Prozess interessiert, in dem ein Teilchen von weit weg herkommt und sich für $t \to \infty$ zum Ursprung $r = 0$ bewegt. Anders gesagt, das Teilchen wird duch das zentrale Potenzial eingefangen.

(a) Die charakteristische Eigenschaft dieses Problems ist, dass es *keinen* Wendepunkt gibt. Zeigen Sie, dass dies impliziert, dass die Energie $E$ größer als das effektive Potenzial $U_{\text{eff}}(r) = U(r) + E\rho^2/r^2$ sein muss:

$$E - U_{\text{eff}}(r) > 0 \quad \text{für alle } r \; . \tag{1}$$

(b) Damit Gleichung (1) gültig ist, muss $U_{\text{eff}}(r)$, insbesondere für $r \to 0$, endlich sein. Zeigen Sie, dass Teilcheneinfang nur möglich ist wenn $U(r)$ wie $-\beta/r^2$, mit $\beta > E\rho^2$, nach $-\infty$ geht oder wenn $U(r)$ proportional zu $-1/r^n$ mit $n > 2$ ist.

Betrachten wir ein anziehendes Potenzial $U(r) = -\beta/r^2$ mit $\beta > 0$.

(c) Berechnen Sie das effektive Potenzial $U_{\text{eff}}(r)$ und skizzieren Sie es für die zwei Fälle $\beta > E\rho^2$ und $\beta < E\rho^2$.

(d) Was sind die minimalen und maximalen Werte des Stossparameters, für die Teilcheneinfang stattfindet? Berechnen Sie den totalen Wirkungsquerschnitt für Teilcheneinfang,

$$\sigma = \int d\sigma = \int d\rho \, 2\pi\rho \; . \tag{2}$$

Betrachten wir jetzt das Potenzial $U(r) = \alpha/r - \beta/r^2$ mit $\alpha > 0$ und $\beta > E\rho^2$.

(e) Skizzieren Sie das effektive Potenzial $U_{\text{eff}}(r)$ in diesem Fall.

(f) Berechnen Sie den maximalen Wert $U_0$ des effektiven Potenzials.

(g) Damit ein Teilchen das Zentrum erreichen kann, muss die Energie echtgrößer als $U_0$ sein. Zeigen Sie, dass dies eine obere Grenze an den Stossparameter impliziert:

$$\rho^2 < \frac{\beta}{E} - \frac{\alpha^2}{4E^2} \; . \tag{3}$$

(h) Nutzen Sie den Fakt, dass der Stossparameter positiv ist, um herzuleiten, dass

$$E > \frac{\alpha^2}{4\beta} \; , \tag{4}$$

damit ein Teilchen das Zentrum erreichen kann.

(i) Zeigen Sie, dass der totale Wirkungsquerschnitt für Teilcheneinfang durch

$$\sigma = \begin{cases} \pi\left(\frac{\beta}{E} - \frac{\alpha^2}{4E^2}\right) & \text{falls } E > \frac{\alpha^2}{4\beta}\ , \\ 0 & \text{falls } E < \frac{\alpha^2}{4\beta}\ , \end{cases} \tag{5}$$

gegeben ist.