Klassische Theoretische Physik II

Vorlesung: Prof. Dr. K. Melnikov – Übung: Dr. H. Frellesvig, Dr. R. Rietkerk

Übungsblatt 6

Ausgabe: 25.05.18 – Abgabe: 01.06.18 bis 09:30 – Besprechung: 05.06.18

Anmerkung: auf diesem Übungsblatt ist $\vec{L}$ der Drehimpulsvektor, $l = |\vec{L}|$ die Länge des Drehimpulsvektors und M die Masse der Sonne.

Aufgabe 1: Präzession des Perihels **10 Punkte**

Eine der Vorhersagen von Einsteins Allgemeiner Relativitätstheorie ist, dass Planetenbahnen kein stabilen Ellipsen sind. Stattdessen dreht sich ihr Perihel (der Bahnpunkt mit dem geringsten Abstand zur Sonne) langsam um die Sonne. Die korrekte Vorhersage dieses Effekt in der Merkurbahn, war der erste Triumph der Allgemeinen Relativitätstheorie und etablierte sie als Nachfolger der Newtonschen Gravitationstheorie[1].
Der Effekt der relativistischen Korrekturen kann durch einen zusätzlichen Term im Gravitationspotenzial proportional zu r^{-2} modelliert werden. Das ganze Potenzial ist dann durch

$$U(r) = -\frac{k}{r} + \frac{C}{r^2} \tag{1}$$

gegeben, wobei k dieselbe Konstante wie in der Netwonschen Gravitationtheorie ist und C die relativistische Korrektur parametrisiert.

(a) Geben Sie die Lagrangefunktion für ein Objekt mit Masse m in diesem Potenzial an.

(b) Welche Erhaltungsgrößen gibt es? Erklären Sie warum dadurch die Bewegung in einer zweidimensionalen Ebene stattfindet und natürlicherweise durch Polarkoordinaten r und θ beschrieben wird.

(c) Für ein Objekt in einem Zentralpotenzial, kann θ durch r ausgedrückt werden als

$$\theta = \int \frac{dr}{r^2\sqrt{\frac{2mE}{l^2} - \frac{2mU(r)}{l^2} - \frac{1}{r^2}}}\,, \tag{2}$$

wobei $l = |\vec{L}|$ die Länge des Drehimpulsvektors und E die Energie ist. Zeigen Sie, dass die Bahn durch

$$r = \frac{\rho(1-\epsilon^2)}{1+\epsilon\cos(\alpha\theta)}\,, \tag{3}$$

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Tests_of_general_relativity

gegeben ist, wobei ρ, ϵ und α von E, l, m, k und C abhängen.
Hinweis 1: folgen Sie den gleichen Schritten wie in der Herleitung der Keplerbahnen in der Vorlesung.
Hinweis 2: benutzen Sie das Integral

$$\int \frac{dz}{\sqrt{az^2 + bz + c}} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \arccos\left(-\frac{b + 2az}{\sqrt{b^2 - 4ac}}\right), \tag{4}$$

und die Variablensubstitution $z = 1/r$.

(d) Die Formel für α ist

$$\alpha = \sqrt{1 + \frac{2mC}{l^2}}\,. \tag{5}$$

Was sind die Formeln für ρ und ϵ?

(e) Skizzieren Sie die Bahn für Werte von α nahe eins. Deuten Sie α, ρ und ϵ auf der Skizze an. Was ist der wesentliche Unterschied zwischen den Fällen $\alpha = 1$ und $\alpha \neq 1$?

(f) Nehmen Sie an, dass C viel kleiner als alle anderen Größen des Problems ist.
Leiten Sie die Geschwindigkeit der Periheldrehung, d.h. die Änderung der Position des Winkels des Perihels nach jedem Bahnumlauf,

$$\Delta\theta = \frac{-2\pi mC}{l^2} \tag{6}$$

her.

(g) Einsteins' Theorie sagt vorher, dass

$$C = \frac{-3G^2M^2m}{c^2}\,, \tag{7}$$

wobei G die Newtonsche Konstante, M die Masse der Sonne und c die Lichtgeschwindigkeit ist.
Ersetzen Sie E und l durch die direkt messbaren Größen ϵ und ρ und zeigen Sie, dass die Geschwindigkeit der Periheldrehung durch

$$\Delta\theta = \frac{6\pi MG}{c^2(1 - \epsilon^2)\rho}\,, \tag{8}$$

gegeben ist.
Hinweis: Sie dürfen die Newtonschen Formeln für k, ρ und ϵ benutzen:

$$k = GMm\,, \qquad \rho = -\frac{GMm}{2E}\,, \qquad \epsilon = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}}\,. \tag{9}$$

(h) Der beobachtete Wert der Geschwindigkeit der Periheldrehung des Merkurs ist 5600 Bogensekunden pro Jahrhundert (eine Bogensekunde ist 1/3600 Grad), aber die größten Beiträge kommen aus Gravitationseffekten der anderen Planeten, welche auch durch die Newtonsche Gravitationstheorie beschrieben werden. Wie groß ist der relativistische Beitrag an der Geschwindigkeit der Periheldrehung des Merkurs?

Hinweis: Für den Planeten Merkur gilt: $\epsilon = 0.206$, $\rho = 57.9 \times 10^9$m, Bahnperiode $\tau = 88.0$ Tagen (am Erde), und $m = 3.30 \times 10^{23}$kg. Zusätzlich $M = 1.99 \times 10^{30}$kg, $G = 6.67 \times 10^{-11} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg \cdot s}^2}$ und $c = 3.00 \times 10^8 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Aufgabe 2: Der Runge-Lenz-Vektor $\boxed{\textbf{10 Punkte}}$

In einem vorherigen Übungsblatt hatten wir gezeigt, dass der Runge-Lenz-Vektor $\vec{A}$ im Kepler-Problem erhalten ist. Der Runge-Lenz-Vektor ist gegeben durch

$$\vec{A} = \vec{p} \times \vec{L} - mk\hat{r}\,, \tag{1}$$

wobei $\vec{p}$ der Impulsvektor, $\vec{L}$ der Drehimpulsvektor, $k = GMm$ und $\hat{r} = \vec{r}/|r|$ der Einheitsvektor in Radialrichtung ist.

(a) Skizzieren Sie eine elliptische Bahn und zeichnen Sie die Richtung des Runge-Lenz-Vektor an verschiedenen Positionen entlang der Bahn.

(b) Wir führen den Winkel θ zwischen $\vec{A}$ und $\vec{r}$ ein, so dass $\vec{A} \cdot \vec{r} = |A||r|\cos(\theta)$. Setzen Sie diesen Ausdruck gleich mit dem expliziten Ausdruck für $\vec{A} \cdot \vec{r}$, um die Formel

$$r = \frac{l^2}{mk + A\cos\theta}\,, \tag{2}$$

herzuleiten, wobei $l = |\vec{L}|$.

(c) Vergleichen Sie Gl. (2) mit der Formel für eine elliptische Bahn,

$$r = \frac{(1-\epsilon^2)\rho}{1+\epsilon\cos\theta}\,, \tag{3}$$

um A durch die Exzentrizität ϵ auszudrücken.

(d) Bei Abweichungen von einem $1/r$ Potenzial ist der Runge-Lenz-Vektor nicht mehr erthalten. Zeigen Sie, dass die Zeitableitung des Runge-Lenz-Vektor für ein generelles radiales Potenzial $U(r) = -k/r + \delta U(r)$ gegeben ist durch

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = f(r)\hat{r} \times \vec{L}\,, \tag{4}$$

wobei $f(r) = -\frac{d\,\delta U(r)}{dr}$.
Hinweis: benutzen Sie die Vektoridentität $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$.

(e) Benutzen Sie die Erhaltung des Drehimpulses, um die Zeitableitung als Winkelableitung auszudrücken und damit die Formel

$$\frac{d\vec{A}}{d\theta} = -f(r)mr^2\hat{L} \times \hat{r}\,, \tag{5}$$

herzuleiten, wobei $\hat{L} = \vec{L}/l$ der Einheitsvektor in die $\vec{L}$ Richtung ist.

(f) Betrachten wir jetzt die $1/r^2$ Störung aus der vorherigen Aufgabe, so dass $f(r) = \frac{2C}{r^3}$. Zeigen Sie, dass die Änderung des Runge-Lenz-Vektors während einem Bahnumlauf näherungsweise gegeben ist durch

$$\Delta\vec{A} = \frac{-2\pi C m}{l^2}\hat{L} \times \vec{A}\,. \tag{6}$$

Hinweis 1: parametrisieren Sie den Raum so, dass $\hat{r} = \cos\theta\hat{x} + \sin\theta\hat{y}$ und $\hat{L} = \hat{z}$. Hinweis 2: $\int_0^{2\pi}\cos\theta\sin\theta = 0$ und $\int_0^{2\pi}\cos^2\theta = \pi$.

(g) Vergleichen Sie Gl. (6) mit der Formel für die Geschwindigkeit der Periheldrehung aus der vorherigen Aufgabe,

$$\Delta\theta = \frac{-2\pi m C}{l^2}\,. \tag{7}$$

Wie deuten Sie diese Übereinstimmung? Wie passt es mit der Skizze in Frage (a) zusammen?