Klassische Theoretische Physik II

Vorlesung: Prof. Dr. K. Melnikov – Übung: Dr. H. Frellesvig, Dr. R. Rietkerk

Übungsblatt 4

Ausgabe: 11.05.18 – Abgabe: 18.05.18 bis 09:30 – Besprechung: 22.05.18

Aufgabe 1: Galileitransformationen **8 Punkte**

In der Vorlesung wurde ein allgemeiner Ausdruck für Erhaltungsgrößen hergeleitet, der aus der Invarianz der Wirkung unter infinitesimalen Transformation

$$q_i \to q_i' = q_i + \epsilon \Psi_i(q,t) \,, \qquad t \to t' = t + \epsilon X(q,t) \tag{1}$$

mit $q = \{q_j\}$ folgt. Hier betrachten wir nun den Fall, in dem sich die Wirkung mit einer totalen Zeitableitung ändert:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \partial q/\partial t, t) dt = \int_{t_1'}^{t_2'} \left(L(q', \partial q'/\partial t', t') + \epsilon \frac{df(q',t')}{dt'} \right) dt' \,, \tag{2}$$

wobei f eine Funktion ist, welche bestimmt werden muss. Wie in der Vorlesung gezeigt, ändert die totale Zeitableitung die Physik nicht.

(a) Zeigen Sie, dass die Erhaltungsgröße in diesem Fall gegeben ist durch

$$I = LX + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} (\Psi_i - \dot{q}_i X) + f(q,t) \,. \tag{3}$$

Hinweis: folgen Sie den gleichen Schritten wie in der Vorlesung.

(b) Betrachten wir jetzt eine (infinitesimale) Galilei-Transformation $q_i \to q_i + \epsilon w_i t$. Was ist die physikalische Interpretation dieser Transformation und was stellen die w_i dar?

(c) Leiten Sie eine Formel für die Erhaltungsgröße I_g eines freies Teilchen mit Masse m her, die aus der Invarianz der Wirkung unter Galilei-Transformationen folgt. Hinweis: bestimmen Sie Ψ_i, X und f.

(d) Zeigen Sie, dass dieses die Invarianz von

$$\chi_i = m q_i - p_i t \,, \tag{4}$$

für $i \in \{1,2,3\}$ impliziert ($p_i = m\dot{q}_i$ bezeichnet den Impuls).

(e) Ein freies Teilchen erhält die Energie (eine Gleichung), den Impuls (drei Gleichungen) und den Drehimpuls (drei Gleichungen). Zusätzlich sind die drei Größen in Gl. (4) erhalten. Insgesamt gibt es deshalb zehn Bewegungsintegrale, welche die Physik charakterisieren. Allerdings ist die Bewegung eines Teilchens in drei Dimensionen komplett festgelegt durch sechs Bedingungen (z.B. die Position und Geschwindigkeit bei $t = 0$). Warum ist das System durch die zehn Bewegungsintegrale nicht überbestimmt?

Aufgabe 2: Die Erhaltung des Runge-Lenz-Vektors **12 Punkte**

In dieser Aufgabe leiten wir die Erhaltung, unter bestimmten Bedingungen, einer Größe bekannt als Runge-Lenz-Vektor $\vec{A}$ her. Wir beginnen mit der Erhaltungsgröße aus der letzten Aufgabe,

$$I = LX + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(\Psi_i - \dot{q}_i X) + f\,. \tag{1}$$

Diese ist immer dann erhalten wenn die Physik invariant ist unter

$$\begin{aligned} q_i \to q_i' = q_i + \epsilon\Psi_i(q,t)\,, \qquad t \to t' = t + \epsilon X(q,t)\,, \\ L(q,\dot{q},t) \to L(q',\dot{q}',t') + \epsilon\frac{df(q',t')}{dt'}\,. \end{aligned} \tag{2}$$

(a) Betrachten wir eine Transformation mit $\Psi_i = \beta_i(t)$ und $X = 0$. Die Funktion f wird erst später bestimmt. Was ist die Erhaltungsgröße I_A, welche aus der Invarianz unter diesen Transformation folgt?

(b) Die Erhaltung von I_A impliziert, dass $\frac{dI_A}{dt} = 0$. Gegeben sei ein Teilchen mit Masse m in einem Potenzial $U(q)$. Zeigen Sie, dass $\frac{dI_A}{dt}$ gegeben ist durch

$$\frac{dI_A}{dt} = \sum_i \left(\left(m\dot{\beta}_i + \frac{\partial f}{\partial q_i}\right)\dot{q}_i - \beta_i\frac{\partial U}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial f}{\partial t}\,. \tag{3}$$

(c) Wir möchten Gl. (3) benutzen, um einen Ausdruck für f zu finden. Da f unabhängig von $\dot{q}$ ist (wie angenommen), müssen die Koeffizienten jedes $\dot{q}_i$ in Gl. (3) Null sein. Zeigen Sie, dass eine Lösung für f gegeben ist durch

$$f(q,t) = -m\dot{\beta}_i q_i\,. \tag{4}$$

(d) Bestimmen Sie den Ausdruck für I_A mit dieser Lösung für f eingesetzt.

(e) Das Potenzial sei sphärisch symmetrisch, so dass $U(q) = U(r)$ mit $r = \sqrt{q_i^2}$. Zeigen Sie, dass β_i die Differentialgleichung

$$\ddot{\beta}_i + \frac{1}{mr}\frac{\partial U}{\partial r}\beta_i = 0\,, \tag{5}$$

erfüllt.

Jetzt betrachten wir ein Teilchen entlang eines bestimmten Pfades $q_i = x_i(t)$, welcher die Bewegungsgleichungen des Systems löst.

(f) Betrachten wir das Kepler-Problem, d.h. das Potenzial ist $U(r) = \frac{-k}{r}$. Zeigen Sie, dass $\beta_i(t) = \kappa_i \sum_j x_j(t)\dot{x}_j(t)$ eine Lösung von Gl. (5) ist, wobei κ_i freie Konstanten sind. Hinweis: bestimmen und benutzen Sie die Bewegungsgleichungen für diese Potenzial.

(g) Zeigen Sie, dass mit dieser Wahl der β_i, die Erhaltungsgröße gegeben ist durch

$$I_A = \sum_i \kappa_i \left(m\dot{x}_i x_j \dot{x}_j + (k/r - m\dot{x}^2)x_i\right)\,. \tag{6}$$

(h) Der Runge-Lenz-Vektor ist definiert durch

$$\vec{A} = \vec{p} \times \vec{M} - mk\frac{\vec{r}}{r}\,, \tag{7}$$

wobei $\vec{p}$ der Impulsvektor und $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{p}$ der Drehimpulsvektor ist. Zeigen Sie, dass der Runge-Lenzvektor im Kepler-Problem erhalten ist. Zeigen Sie dazu, dass die Erhaltung von I_A in Gl. (6) äquivalent mit der Erhaltung des Runge-Lenz-Vektors ist.

Die Erhaltung des Runge-Lenz-Vektors im Kepler-Problem ist nützlich zur Lösung von Problemen in der Himmelsmechanik. Auf einem zukünftigen Übungsblatt werden wir den Runge-Lenz-Vektor bei solchen Problemen verwenden.