

Klassische Theoretische Physik II

Vorlesung: Prof. Dr. K. Melnikov – Übung: Dr. H. Frellesvig, Dr. R. Rietkerk

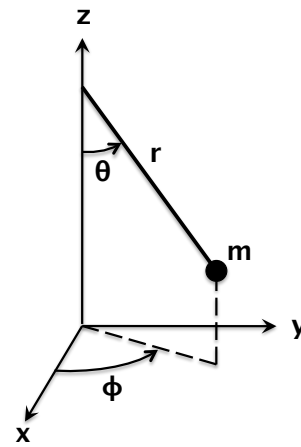
Übungsblatt 3

Ausgabe: 04.05.18 – Abgabe: 11.05.18 bis 09:30 – Besprechung: 15.05.18

Aufgabe 1: Sphärisches Pendel

5 Punkte

Ein sphärisches Pendel besteht aus einer masselosen Stange der Länge r , welche mit einer Seite an einem festen Punkt angebracht ist, und an der anderen Seite eine Masse m befestigt hat. Das Pendel kann sich unter der Einwirkung der Schwerkraft frei in zwei Richtungen um den festen Aufhängepunkt bewegen. Die Position des Pendels lässt sich deshalb mit zwei sphärische Koordinaten (θ, ϕ) eindeutig beschreiben.



- Konstruieren Sie die Lagrange'sche Funktion des Systems.
- Die Lagrange'sche Funktion ist unabhängig von der Zeit t . Wie lautet die entsprechende Erhaltungsgröße? Leiten Sie deren Ausdruck her, beginnen Sie mit der allgemeinen Formel für die erhaltene Noetherladung

$$I = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} (\Psi_i - X \dot{q}_i) + L X, \quad (1)$$

zugehörig zur allgemeinen Symmetrietransformation $t \rightarrow t + \epsilon X(\{q_j\}, t)$, $q_i \rightarrow q_i + \epsilon \Psi_i(\{q_j\}, t)$.

- Die Lagrange'sche Funktion ist weiterhin unabhängig von der Koordinate ϕ . Was ist die zugehörige Symmetrie der Wirkung? Leiten Sie die entsprechende Erhaltungsgröße aus Gleichung (1) her. Was ist die physikalische Interpretation dieser Erhaltungsgröße?
- Bestimmen Sie die Euler-Lagrange Gleichungen. Welche Gleichung führt zur Erhaltungsgröße in Frage c) ?
- Nehmen Sie an, dass $\theta = \theta_0$ konstant sei. Zeigen Sie, dass das Pendel in diesem Fall mit der konstanten Winkelfrequenz

$$\dot{\phi}_0 = \sqrt{\frac{g}{r \cos \theta_0}}, \quad (2)$$

um die vertikale Achse rotiert.

Aufgabe 2: Erhaltungsgrößen in verschiedenen Potenzialen 10 Punkte

Betrachten wir ein Teilchen mit Masse m und Position $\vec{r} = (r_1(t), r_2(t), r_3(t))$, dessen Bewegung durch die Lagrange'sche Funktion $L = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 - U(\vec{r}, t)$ beschrieben wird. Wir möchten verschiedene Potenziale $U(\vec{r}, t)$ betrachten, um zu Üben wie man Symmetrietransformationen der Wirkung findet und die entsprechende Erhaltungsgrößen bestimmt.

- (a) Es sei $U(\vec{r}, t) = U(\vec{r} - \vec{v}_0 t)$, wobei $\vec{v}_0$ ein konstanter Vektor ist. Welche infinitesimale Transformation der Form

$$\begin{aligned} r_i &\rightarrow r_i + \epsilon \Psi_i \quad (i = 1, 2, 3) , \\ t &\rightarrow t + \epsilon X , \end{aligned} \tag{1}$$

lässt die Lagrange'sche Funktion (und damit die Wirkung) invariant? Zeigen Sie das die zugehörige Erhaltungsgröße durch

$$E(t) - \vec{p} \cdot \vec{v}_0 = \text{const} , \tag{2}$$

gegeben ist, wobei die Energie $E(t) = T + U = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 + U$ nicht konstant ist.

- (b) Es sei $U(\vec{r}, t) = -\vec{F} \cdot \vec{r}$, wobei $\vec{F}$ eine konstante Kraft ist. Offensichtlich hängt die Lagrange'sche Funktion nicht von der Zeit ab, sodass $t \rightarrow t + \epsilon$ eine Symmetrie der Wirkung ist, und damit die Energie erhalten ist. Finden Sie zwei zusätzliche Arten von Transformationen der Koordinaten, welche die Wirkung invariant lassen und welche zur Impulserhaltung in der Ebene senkrecht zu $\vec{F}$ und zur Drehimpulserhaltung um die Achse $\vec{F}/|\vec{F}|$ führen.
- (c) Nun sei das Potenzial unabhängig von der Zeit t (E ist also erhalten) und erfüllt die Bedingung $U(\lambda \vec{r}) = \lambda^{-2} U(\vec{r})$. Finden Sie eine infinitesimale Transformation von sowohl r_i als auch t (Gleichung (1)), welche die Wirkung (aber nicht die Lagrange'sche Funktion) invariant lasst. Finden Sie die damit verbundene Erhaltungsgröße

$$\vec{p} \cdot \vec{r} - 2Et = \text{const} . \tag{3}$$

- (d) Es sei $U(\vec{r}) = -k/r^2$, mit $k > 0$. Bestätigen Sie das dies einen Spezialfall von Frage c) darstellt, sodass also Gleichung (3) gilt. Weil es sich außerdem um ein Zentralpotenzial handelt, ist der Drehimpuls $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{p}$ ebenfalls erhalten. Zeigen Sie, dass die dritte Erhaltungsgröße, die Energie, geschrieben werden kann als

$$E = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 + \frac{M^2}{2mr^2} - \frac{k}{r^2} . \tag{4}$$

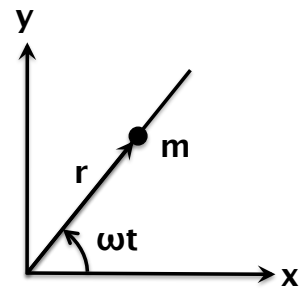
Alle diese Erhaltungsgrößen sind nützlich, um die Bahnkurve relativ einfach zu bestimmen ohne Differenzialgleichungen zu lösen. Kombinieren Sie Gleichungen (3) und (4) um die radiale Bewegungsbahn herzuleiten,

$$r(t) = \sqrt{\frac{(2Et + \text{const})^2 + M^2 - 2mk}{2mE}} . \tag{5}$$

Hinweis: Zeigen Sie, dass $\vec{p} \cdot \vec{r} = m\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}$.

Aufgabe 3: Gleitende Perle auf einem rotierenden Draht**5 Punkte**

Das gezeigte System besteht aus einer Perle mit Masse m die frei auf einem rotierenden, massenlosen Draht gleitet. Der Draht rotiert in der (x, y) -Ebene mit konstanter Winkelfrequenz ω .



- (a) Konstruieren Sie die Lagrange'sche Funktion für dieses System.
- (b) Berechnen Sie die Erhaltungsgröße, die daraus folgt, dass die Lagrange'sche Funktion nicht explizit zeitabhängig ist.
- (c) Beschreibt die Erhaltungsgröße in Frage b) die Energie der Perle? Begründen Sie Ihre Antwort.
- (d) Finden und skizzieren Sie die Bahn $r(t)$ mit den Randbedingungen $r(0) = r_0 > 0$ und $\dot{r}(0) = 0$.