Klassische Theoretische Physik II

Vorlesung: Prof. Dr. K. Melnikov – Übung: Dr. H. Frellesvig, Dr. R. Rietkerk

Übungsblatt 13

Ausgabe: 13.07.18 – Abgabe: 20.07.18 bis 09:30

Aufgabe 1: Teller — 8 Punkte

Wir entwenden aus der TTP-Küche einen dünnen kreisförmigen Teller mit dem Radius R und einer homogenen Massendichte, sodass die Gesamtmasse des Tellers m beträgt. Wir positionieren den Teller in der x, y-Ebene mit dem Zentrum im Ursprung.

(a) Was ist das (skalare) Trägheitsmoment des Tellers um die z-Achse?

(b) Was ist das (skalare) Trägheitsmoment des Tellers um die x-Achse? Und um die y-Achse?

(c) Betrachten Sie eine Achse parallel zur z-Achse durch den Rand des Tellers. Berechnen Sie das (skalare) Trägheitsmoment des Tellers um diese neue Achse mithilfe des Steinerschen Satzes.

(d) Beantworten Sie die vorherige Frage durch das direkte Lösen des Integrals und überprüfen Sie die Übereinstimmung mit dem vorherigen Resultat.

(e) Nun bohren wir ein Loch mit dem Radius q an der Stelle $(r, 0, 0)$ in den Teller, so dass $q < r$ und $q + r < R$. Was sind nun die (skalare) Trägheitsmomente des Tellers um die x-, y-, und z-Achse?

(f) Nachdem wir den Teller gegen einen neuen ohne Loch ersetzt haben, legen wir diesen auf eine Töpferscheibe, die ihn mit der Kreisfrequenz ω um die x-Achse rotieren lässt. Was ist die kinetische Energie des Tellers?

(g) Nun nehmen wir den Teller und lassen ihn durch den Flur im 11. Stock mit der Geschwindigkeit v rollen. Was ist seine kinetische Energie?

Aufgabe 2: Polygon — 4 Punkte

Wir betrachten ein homogenes dünnes regelmäßiges Polygon mit der Masse m, der Fläche A und mit N Seiten.

(a) Berechnen Sie das (skalare) Trägheitsmoment I_N des Polygons um die senkrechte Achse durch das Zentrum.

(b) Zeigen Sie, dass sich mit dem allgemeinen Resultat der vorherigen Frage die Trägheitsmomente eines Quadrats und eines Kreises reproduzieren lassen:

$$I_{\text{Quadrat}} = \frac{mA}{6} , \qquad I_{\text{Kreis}} = \frac{mA}{2\pi} . \tag{1}$$

Hinweis: Verwenden Sie $\lim_{N\to\infty} N \tan(\pi/N) = \pi$.

Aufgabe 3: Schaukelstuhl $\boxed{\textbf{8 Punkte}}$

Nachdem wir den ganzen Tag mit Tellern und Polygonen gearbeitet haben, wollen wir uns in einem Schaukelstuhl ausruhen. Dieser hat die Masse m und das Trägheitsmoment I_s um der Massenmittelpunkt. Die Füße des Stuhls sind bogenförmige Holzstücke mit dem Radius R. Wenn der Stuhl aufrecht steht, befindet sich der Massenmittelpunkt auf der Höhe h (mit $h < R$) über den Kontaktpunkten. Ziel dieser Aufgabe ist es, die „Schaukelfrequenz“ des Schaukelstuhls zu bestimmen.

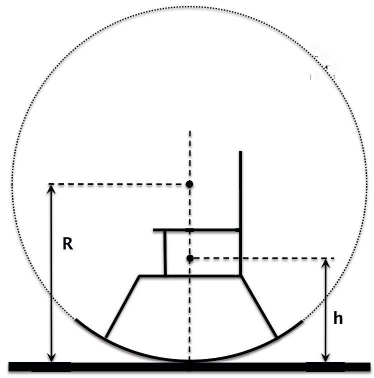

Abbildung 1: Schaukelstuhl.

(a) Finden Sie die Position des Massenmittelpunkts $(x_\text{cm}(\theta), y_\text{cm}(\theta))$ in Abhängigkeit des Winkels θ zwischen dem Schaukelstuhl und der Vertikalen. Der Winkel ist so definiert, dass bei $\theta = 0$ der Stuhl aufrecht steht und er bei $\theta > 0$ rückwärts neigt, siehe Abbildung 2. Der Ursprung liege bei $(x_\text{cm}(0), y_\text{cm}(0)) = (0, h)$.

(b) Bestimmen Sie die potentielle Energie des Schaukelstuhls (bedingt durch Gravitation) in Abhängigkeit von θ. Entwickeln Sie die potentielle Energie um den Gleichgewichtspunkt. Warum sind kleine Schwingungen des Schaukelstuhls um den Gleichgewichtspunkt stabil?

(c) Bestimmen Sie die kinetische Energie des Schaukelstuhls in Abhängigkeit von θ und entwickeln Sie diese um den Gleichgewichtspunkt.

(d) Zeigen Sie, dass die Frequenz der kleinen Schwingungen durch

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mg(R-h)}{I_\text{s} + mh^2}} \tag{1}$$

gegeben ist.

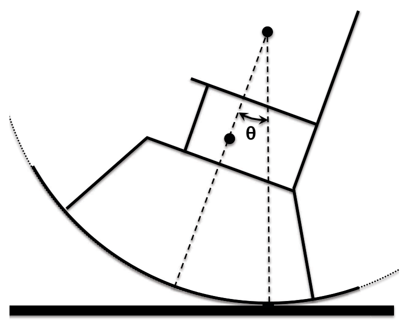

Abbildung 2: Der rückwärts neigende Schaukelstuhl bildet einen Winkel θ zur Vertikalen.