

Klassische Theoretische Physik II

Vorlesung: Prof. Dr. K. Melnikov – Übung: Dr. H. Frellesvig, Dr. R. Rietkerk

Übungsblatt 12

Ausgabe: 06.07.18 – Abgabe: 13.07.18 bis 09:30 – Besprechung: 17.07.18

Aufgabe 1: Unharmonischer Oszillator

8 Punkte

In diese Aufgabe betrachten wir einen unharmonischen Oszillator, der durch die Hamilton Funktion

$$H = \frac{p^2}{2m}(1 + \epsilon\beta x) + \frac{1}{2}mx^2\omega^2(1 + \epsilon\alpha x) , \quad (1)$$

beschrieben wird, wobei ϵ eine kleine dimensionslose Konstante ist. Mit Hilfe der erzeugenden Funktion

$$F = \Phi(x, P) - XP , \quad (2)$$

führen wir nun eine kanonische Transformation $(x, p) \rightarrow (X, P)$ aus. Die erzeugende Funktion ist so definiert, dass die Variation der Wirkung unverändert bleibt, oder entsprechend

$$p\dot{x} - H(x, p) = P\dot{X} - K(X, P) + \frac{dF}{dt} , \quad (3)$$

wobei K die Hamilton Funktion für die neuen Koordinaten ist.

(a) Leiten Sie die folgenden Transformationsgleichungen her:

$$p = \frac{\partial\Phi}{\partial x} , \quad X = \frac{\partial\Phi}{\partial P} . \quad (4)$$

(b) Welche Transformation wird durch $\Phi = xP$ generiert?

(c) Betrachten wir nun die erzeugende Funktion, mit

$$\Phi = xP + \epsilon ax^2P + \epsilon bP^3 . \quad (5)$$

Bestimmen Sie die Werte von a und b , so dass $K(X, P)$, bis zur Ordnung ϵ^2 , die Hamilton Funktion eines harmonischen Oszillators ist.

(d) Drücken Sie $x(t)$ durch die bekannten sinusförmigen Lösungen des harmonischen Oszillators aus.

Betrachten wir den harmonischen Oszillator, der durch die Hamilton Funktion

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \quad (1)$$

beschrieben wird.

- (a) Überprüfen Sie, dass

$$x = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin(\omega t + \theta_0), \quad p = \sqrt{2Em} \cos(\omega t + \theta_0), \quad (2)$$

die Hamilton Gleichungen lösen.

- (b) Skizzieren Sie den Pfad einer Schwingung im (x, p) Phasenraum, und geben Sie dabei die Abhängigkeit von E und t an.
- (c) Sei m und ω präzise bekannt. Die Energie liege innerhalb des Bereiches zwischen E_0 und $E_0 + \Delta E$. Die Zeit liege ebenfalls zwischen t_0 und $t_0 + \Delta t$. Bestimmen Sie den Flächeninhalt der Oberfläche im (x, p) Phasenraum in dem sich das Teilchen befinden kann. (ΔE und Δt sind klein.)
Hinweis: Betrachten Sie die Änderung einer infinitesimalen Oberfläche unter Variablensubstitution.
- (d) Führen wir nun eine kanonische Transformation, zu den neuen Variablen X und P aus, die durch die erzeugende Funktion

$$F = \frac{m\omega}{2} x^2 \cot(X), \quad (3)$$

definiert ist. (Hierbei ist $\cot$ der Kotangens $\cot(z) = \cos(z)/\sin(z)$.)
Finden Sie Ausdrücke für x und p in Abhängigkeit von X und P .

- (e) Finden Sie Ausdrücke für X und P .
- (f) Skizzieren Sie den Pfad einer Schwingung im (X, P) Phasenraum, und berechnen Sie den Flächeninhalt der Oberfläche auf der sich das Teilchen befinden kann, falls es die vorher besprochene ΔE und Δt Unbestimmtheit besitzt.