Klassische Theoretische Physik II

Vorlesung: Prof. Dr. K. Melnikov – Übung: Dr. H. Frellesvig, Dr. R. Rietkerk

Übungsblatt 11

Ausgabe: 29.06.18 – Abgabe: 06.07.18 bis 09:30 – Besprechung: 10.07.18

Aufgabe 1: Hamilton-Funktion für physikalische Systeme — 5 Punkte

Finden Sie die kanonischen Impulse, die Hamilton-Funktion und die Hamiltonischen Bewegungsgleichungen für die folgenden Systeme.

(a) Ein freies Teilchen der Masse m in einer Dimension.

(b) Ein harmonischer Oszillator der Masse m und Winkelfrequenz ω in einer Dimension.

(c) Ein Teilchen der Masse m in einem eindimensionalen Potenzial $U(x) = \alpha x^n$.

(d) Ein Teilchen der Masse m in einem dreidimensionalen Potenzial $U(r) = -k/r$. Nutzen Sie Polarkoordinaten r, θ, ϕ.

(e) Zwei Teilchen der Massen m und M die gravitativ in einer zweidimensionalen Ebene miteinander interagieren. Nutzen Sie für beide Teilchen kartesische Koordinaten x_i, y_i. (Was wäre eine bessere Wahl der Koordinaten?)

Aufgabe 2: Poisson-Klammern — 6 Punkte

Betrachten wir ein Teilchen mit der Masse m, den dreidimensionalen Koordinaten $\vec{r}$ und dem Impuls $\vec{p}$. Der Drehimpuls des Teilchens ist $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{p}$. Die Komponenten dieser Vektoren werden mit r_i, p_i und M_i bezeichnet, und die Längen entsprechend mit r, p und M.

(a) Berechnen Sie die Poisson-Klammern

$$\{M_i, r_j\} \ , \ \{M_i, p_j\} \ , \ \{M_i, M_j\} \ \text{ und } \ \{M_i, M^2\} \ . \tag{1}$$

(b) Der Runge-Lenz-Vektor ist durch $\vec{A} = \vec{p} \times \vec{M} - mk\hat{r}$ gegeben, wobei $\hat{r} = \vec{r}/r$. Zeigen Sie, dass

$$\{M_i, A_j\} = -\epsilon_{ijk} A_k \ . \tag{2}$$

(c) Beweisen Sie, dass der Runge-Lenz-Vektor im Kepler-Problem erhalten ist. Zeigen Sie also, dass $\{H, A_i\} = 0$ für die Hamilton-Funktion $H = \frac{p^2}{2m} - \frac{k}{r}$ gilt.

Aufgabe 3: Teilchen im Magnetfeld $\boxed{\textbf{9 Punkte}}$

Die Bewegung eines Teilchen der Masse m und Ladung e wird durch die Lagrange-Funktion

$$L = \tfrac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 - \left(e\phi(\vec{r},t) - \frac{e}{c}\vec{A}(\vec{r},t)\cdot\dot{\vec{r}}\right) , \tag{1}$$

beschrieben, wobei ϕ und $\vec{A}$ elektromagnetische Potenziale sind.

(a) Finden Sie den kanonischen Impuls $\vec{p}$, konstruieren Sie die Hamilton-Funktion und zeigen Sie, dass die Hamilton-Gleichungen durch

$$\dot{r}_i = \frac{1}{m}\left(p_i - \frac{e}{c}A_i\right) , \quad \dot{p}_i = \frac{e}{mc}\left(p_j - \frac{e}{c}A_j\right)\frac{\partial A_j}{\partial r_i} - e\frac{\partial \phi}{\partial r_i} , \tag{2}$$

gegeben sind.

(b) Leiten Sie die Lorentzkraft aus den Hamilton-Gleichungen her.
Hinweis: benutzen Sie Index-Notation und Verwenden Sie die folgenden Ausdrücke für das elektrische und magnetische Feld

$$E_i = -\frac{\partial \phi}{\partial r_i} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_i}{\partial t} , \quad B_i = \epsilon_{ijk}\frac{\partial A_k}{\partial r_j} . \tag{3}$$

(c) In Gegenwart von einem magnetisches Feld gilt, dass $\vec{p} \neq m\vec{v}$, wobei $\vec{v} = \dot{\vec{x}}$. Dies folgt aus der ersten Hamilton Gleichung in Gleichung (2). Poisson-Klammern stellen dies ebenfalls dar: obwohl $\{p_i, p_j\} = 0$, zeigen Sie, dass

$$\{v_i, v_j\} = -\frac{e}{m^2c}\epsilon_{ijk}B_k . \tag{4}$$

(d) Betrachten Sie ein auf die x, y-Ebene beschränktes Teilchen, mit den Potenzialen $\phi(\vec{r},t) = 0$ und $\vec{A}(\vec{r},t) = (-By, 0, 0)^T$. Was sind die $\vec{E}$ und $\vec{B}$ Felder? Geben Sie die Hamilton-Gleichungen für diesen spezifischen Fall an. Zeigen Sie, dass daraus folgt

$$m\dot{y} + \frac{eB}{c}x = K_1 , \quad m\dot{x} - \frac{eB}{c}y = K_2 , \tag{5}$$

mit unbekannten konstanten $K_{1,2}$.

(e) Zeigen Sie, dass die allgemeine Lösung von Gleichung (5) durch

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{K_1}{m\omega} + R\sin(\omega t + \phi) , \\ y(t) &= -\frac{K_2}{m\omega} + R\cos(\omega t + \phi) , \end{aligned} \tag{6}$$

gegeben ist, wobei $\omega = \frac{eB}{mc}$ und R und ϕ unbekannte Integrationskonstanten sind.

(f) Fordern Sie die Randbedingungen $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, $\dot{x}(0) = v_0$ und $\dot{y}(0) = 0$, und skizzieren Sie die Bewegung des Teilchens.