Klassische Theoretische Physik II

Vorlesung: Prof. Dr. K. Melnikov – Übung: Dr. H. Frellesvig, Dr. R. Rietkerk

Übungsblatt 10

Ausgabe: 22.06.18 – Abgabe: 29.06.18 bis 09:30 – Besprechung: 03.07.18

Aufgabe 1: Störung der Bahn **9 Punkte**

In dieser Aufgabe betrachten wir die Auswirkung von kleinen Störungen einer kreisförmige Bahn in einem Zentralpotential.

(a) Ein Teilchen (der Masse m) bewegt sich in einer Ebene, die durch Polarkoordinaten r und θ beschrieben wird, in Gegenwart von einem Zentralpotential $U(r)$. Zeigen Sie, dass die Lagrange Funktion durch $L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - U(r)$ gegeben ist.

(b) Betrachten wir nun den Fall einer Potenzreihe $U(r) = -ar^{1-n}$. Skizzieren Sie das effektive Potential für verschiedene Werte von n.

(c) Was ist das Verhältnis zwischen R, Ω, n, m und a für den Fall, dass sich das Teilchen auf einer kreisförmigen Bahn mit konstantem Radius R und konstanter Kreisfrequenz Ω bewegt?

(d) Betrachten wir jetzt eine kleine Störungen der Bahn, sodass $r = R + \epsilon\rho$ und $\theta = \Omega t + \epsilon\phi$, wobei ϵ ein kleiner Parameter ist. Zeigen Sie, dass in diesem Fall die Lagrange Funktion durch

$$\begin{aligned} L = &\frac{1}{2}a(1+n)R^{1-n} + \epsilon m R^2 \Omega\dot{\phi} \\ &+ \frac{\epsilon^2}{2}\left(aR^{-n-1}(n^2-1)\rho^2 + m(R^2\dot{\phi}^2 + \dot{\rho}^2 + 4\Omega R\dot{\phi}\rho)\right) + \mathcal{O}(\epsilon^3) \end{aligned} \tag{1}$$

gegeben ist.

(e) Leiten Sie die Bewegungsgleichungen des Teilchens in den neuen Koordinaten her.

(f) Machen Sie einen Ansatz der Form $\exp(i\omega t)$ für ρ und ϕ, sodass $\dot{\rho} = i\omega\rho$, $\ddot{\rho} = -\omega^2\rho$, $\dot{\phi} = i\omega\phi$, $\ddot{\phi} = -\omega^2\phi$ gilt. Zeigen Sie, dass mit diesem Ansatz die Bewegungsgleichungen als $A_{11}\rho + A_{12}\phi = 0$ und $A_{21}\rho + A_{22}\phi = 0$ geschrieben werden können, wobei

$$\begin{aligned} A_{11} &= a(1-n^2)R^{-1-n} - m\omega^2, \qquad & A_{12} &= -2i\omega m R\Omega\,, \\ A_{21} &= 2i\omega m R\Omega\,, & A_{22} &= -\omega^2 m R^2. \end{aligned} \tag{2}$$

(g) Zeigen Sie, dass $A_{11}A_{22} = A_{12}A_{21}$ das Kriterium für die Existenz einer von Null verschiedenen Lösungen (für den bereits gemachten Ansatz) der Bewegungsgleichungen ist.

(h) Zeigen Sie, dass dieses Kriterium $\omega = 0$ oder $\omega = \pm\Omega\sqrt{3-n}$ impliziert.

(i) Der benutzte Ansatz war von der Form $\exp(i\omega t)$ und deshalb im allgemeinen komplex. Geben Sie eine Menge reellwertiger Lösungen für die zulässigen Werte von ω an.

(j) Was ist die physikalische Interpretation dieser Lösungen? Wie interpretiert man die imaginäre Kreisfrequenz ω für $n > 3$?

Aufgabe 2: Ein genaueres Pendel

6 Punkte

In dieser Aufgabe betrachten wir ein Pendel der Länge R und Masse m, wie gezeigt in Abbildung 1.

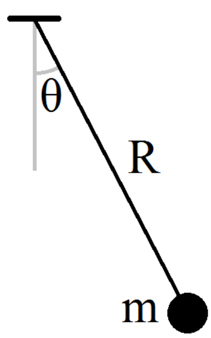

Abbildung 1

(a) Konstruieren Sie die Lagrange Funktion für das Pendel als Funktion des Winkels θ, und bestimmen Sie die Bewegungsgleichung.

(b) Eine übliche Näherung der Pendelgleichung ist durch $\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$ gegeben, wobei $\omega_0^2 = g/R$. Diese Näherung ist für $\theta \ll 1$ gültig. In dieser Aufgabe betrachten wir den nächsten Term in der Kleinwinkelnäherung. Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichung für kleine Winkel durch

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = \alpha\theta^3 \tag{1}$$

genähert werden kann. Was ist die Ausdruck für α?

(c) Unter der Annahme, dass $|\phi| \ll 1$ und $\omega_1 \ll \omega_0$ machen wir einen Ansatz der Form

$$\theta(t) = A_0(\cos(\omega t) + \phi(t)) \qquad \text{wobei} \qquad \omega = \omega_0 + \omega_1 \tag{2}$$

für die Bewegungsgleichung. Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichung für ϕ durch

$$\ddot{\phi} + \omega_0^2\phi = (A_0^2\alpha/4)\cos(3\omega t) + (2\omega_0\omega_1 + 3A_0^2\alpha/4)\cos(\omega t) \tag{3}$$

genähert werden kann.
Hinweis 1: A_0^2, ϕ und ω_1 sind von der selben Größenordnung.
Hinweis 2: Benutzen Sie einen Zusammenhang zwischen $\cos^3(x)$ und $\cos(3x)$.

(d) Die Bewegungsgleichung für ϕ impliziert aus physikalischen Gründen, dass

$$\omega_1 = \frac{-3A_0^2\alpha}{8\omega_0}. \tag{4}$$

Warum ist das so?

(e) Bestimmen Sie ein Lösung für ϕ.

(f) Skizzieren Sie $\theta(t)/A_0$ für die harmonische Lösung $\theta(t) = A_0 \cos(\omega_0 t)$ und für die unharmonische Lösung Gleichung (2) im selben Diagramm. Zeichnen Sie dieses Diagramm für ein paar verschiedene Werte für A_0. Stimmt das Ergebnis mit Ihrer Erwartung für die Kleinwinkelnäherung überein?

Aufgabe 3: Unharmonischer kinetischer Term **5 Punkte**

Ein Oszillator hat einen kinetischen Term mit einem kleinen Positions-abhängigen Beitrag, so dass

$$L = \tfrac{1}{2} m(1 + \gamma x)\dot{x}^2 - \tfrac{1}{2} m\omega_0^2 x^2 \ . \tag{1}$$

Wir machen einen Ansatz der Form

$$x(t) = A\cos(\omega t) + x_1(t) \tag{2}$$

wobei $\omega = \omega_0 + \omega_1$, und wobei $x_1(t)$ und ω_1 als klein und von der selben Größenordnung wie γ zu betrachten sind.

(a) Benutzen Sie die bekannten Lösungsansätze für unharmonische Oszillatoren, und bestimmen Sie ω_1 und $x_1(t)$ in Abhängigkeit von ω_0, γ und A.