

Klassische Theoretische Physik II

Zweite Klausur

Sommersemester 2017

Abgabe: 11.10.2017

nach 2 Stunden

Vorname:

Familiennam:

E-Mail-Adresse:

Matrikelnummer:

Studienfach:

Versuch: erster ☐ zweiter ☐

Tutorium:

A1 (20P)		a)(5P)	b)(5P)	c)(5P)	d)(5P)		
A2 (20P)		a)(10P)	b)(10P)				
A3 (20P)		a)(3P)	b)(2P)	c)(2P)	d)(5P)	e)(4P)	f)(4P)
A4 (20P)		a)(2P)	b)(3P)	c)(2P)	d)(5P)	e)(3P)	f)(5P)
A5 (20P)		a)(5P)	b)(5P)	c)(5P)	d)(5P)		
Σ (100P)							

Lesen Sie den folgenden Text zu Beginn der Klausur bitte sorgfältig durch!

Bitte schreiben Sie oben in jedes Kästchen maximal einen Buchstaben oder eine Ziffer. Schreiben Sie nichts in die Punktetabelle, sie dient der Korrektur. Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer und nummerieren Sie Ihre Blätter fortlaufend durch. **Beginnen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt.** Was nicht bewertet werden soll, ist deutlich durchzustreichen. Bitte kennzeichnen Sie die Endergebnisse der Teilaufgaben deutlich, z.B. durch doppeltes Unterstreichen. Wenn Sie mehr Papier brauchen, heben Sie bitte die Hand.

Legen Sie bitte zu Beginn der Klausur Ihren Studentenausweis neben sich auf den Tisch; er wird während der Klausur kontrolliert. Wer seinen Studentenausweis vergessen hat, verwendet einen anderen Lichtbildausweis. Die Benutzung elektronischer Geräte (Taschenrechner, Mobiltelefone, Tablet-Computer,...) oder anderer Hilfsmittel (Fachbücher, Aufzeichnungen, ältere Geschwister...) ist nicht gestattet. **b.w.**

Wer zur Toilette geht, gibt das Aufgabenblatt und seine Lösungen beim Aufsichtspersonal ab und erhält alles anschließend zurück. Es ist erlaubt, die bearbeitete Klausur vor Ablauf der Bearbeitungszeit von 2 Zeitstunden abzugeben und den Raum zu verlassen. Jedoch: In den letzten 20 Minuten der Bearbeitungszeit darf niemand mehr den Raum verlassen!

Heften Sie die Blätter mit Ihren Lösungen der Klausuraufgaben zusammen, mit diesem Deckblatt als erster Seite. (Die Klausuraufsicht hilft beim Klammern; die Verantwortung für die Vollständigkeit der eingereichten Klausur liegt jedoch bei Ihnen.) Der Aufgabenzettel muss nicht abgegeben werden. Bitte schreiben Sie auch keine Lösungen auf den Aufgabenzettel. Es gibt keine Punkte auf richtiges Rechnen mit falschem Ansatz!

Hinreichend zum Bestehen der Klausur sind 50 Punkte.

Empfehlung: Lesen Sie unbedingt vor der Bearbeitung der Aufgaben die **Formelsammlung** durch, damit Sie auf die richtigen Ideen kommen. Sie dürfen sich ohne Beweis auf diese Formeln beziehen.

Formelsammlung

Integrale:

$$\int \frac{z \, dz}{\sqrt{b^2 - z^2}} = -\sqrt{b^2 - z^2} + C \quad (1)$$

Noether-Theorem:

$$\begin{aligned} q'_k &= q_k + \epsilon \psi_k, & t' &= t + \epsilon \psi_0, & L' &= L + \epsilon \frac{d}{dt} F \\ Q &= \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \psi_k + \left(L - \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k \right) \psi_0 - F \end{aligned} \quad (2)$$

Euler'sche Bewegungsgleichungen:

$$\Theta_1 \dot{\omega}_1 + (\Theta_3 - \Theta_2) \omega_2 \omega_3 = M_1 \quad (3)$$

$$\Theta_2 \dot{\omega}_2 + (\Theta_1 - \Theta_3) \omega_1 \omega_3 = M_2 \quad (4)$$

$$\Theta_3 \dot{\omega}_3 + (\Theta_2 - \Theta_1) \omega_1 \omega_2 = M_3 \quad (5)$$

Notenschlüssel

	0-49	50-53	54-57	58-61	62-65	66-69	70-74	75-79	80-84	85-89	90-100
Note	5.0	4.0	3.7	3.3	3.0	2.7	2.3	2.0	1.7	1.3	1.0

Aufgabe 1: Panorama

In dieser Aufgabe geht es um allgemeines Physik-Verständnis, es sind nur wenige Rechenschritte nötig.

- (a) Betrachten Sie $L = \frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right) - V(r, \theta, t)$ und geben Sie die Euler-Lagrangeschen Bewegungsgleichungen für die verallgemeinerten Koordinaten r , ϕ und θ an. (5 Punkte)
- (b) (i) Welche Koordinate(n) in Teilaufgabe (a) ist/sind zyklisch? (3P)
(ii) Welche Erhaltungsgröße(n) gehört/gehören dazu? (2P) (5 Punkte)
- (c) Betrachten Sie die Lagrangefunktion

$$L(\vec{r}_k, \dot{\vec{r}}_k, t) = \sum_{j=1}^N \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}_j^2 - V(\vec{r}_k, t)$$

L sei invariant unter der infinitesimalen Transformation

$$\vec{r}_k \rightarrow \vec{r}'_k = \vec{r}_k + \epsilon \vec{n} \times \vec{r}_k \quad \text{für jedes } k = 1 \dots N,$$

wobei $\vec{n}$ ein fester, zeitunabhängiger Vektor mit $\vec{n}^2 = 1$ ist.

- (i) Berechnen Sie die infinitesimalen Transformationen von $\vec{r}^2$ und $\vec{n} \cdot \vec{r}$. (2P)
(ii) Berechnen Sie die zugehörige Erhaltungsgröße Q . (2P)
(iii) Welche physikalische Bedeutung hat Q ? (1P) (5 Punkte)
- (d) Die Lagrangefunktion eines Systems aus N Massenpunkten, $L(\vec{r}_k, \dot{\vec{r}}_k)$, $k = 1 \dots N$, sei invariant unter Galilei-Transformationen aller Teilchen. Welche Erhaltungsgrößen gehören zu
(i) Zeittranslationen (1P),
(ii) räumlichen Translationen (1P),
(iii) Geschwindigkeitstransformationen (infinitesimal durch $\vec{r}_k \rightarrow \vec{r}'_k = \vec{r}_k + \epsilon \vec{v} t$ beschrieben)? (3P)
Sie dürfen die Erhaltungsgrößen ohne Herleitung angeben. (5 Punkte)

Aufgabe 2: Kräftefreier symmetrischer Kreisel

Das körperfeste Koordinatensystem mit den Einheitsvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ liege so im Schwerpunkt eines kräftefreien symmetrischen Kreisels, dass $\vec{e}_3$ in Richtung der Symmetrieachse zeigt. Die anderen beiden Achsen $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ sind zueinander und zu $\vec{e}_3$ orthogonal. Die Hauptträgheitsmomente sind $\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta$ und Θ_3 .

- (a) Stellen Sie die Euler'schen Bewegungsgleichungen auf und lösen Sie diese für die Komponenten ω_i der momentanen Drehachse $\vec{\omega}$ im körperfesten Koordinatensystem mit allgemeinen Anfangsbedingungen. Welche Bewegung beschreiben die Vektoren $\vec{\omega}_{\text{KS}}, \vec{L}_{\text{KS}}$ im körperfesten Koordinatensystem? (10 Punkte)
- (b) Betrachten Sie nun die Bewegung in einem raumfesten Koordinatensystem. Schreiben Sie dazu die Vektorgleichungen

$$\vec{\omega} = \sum_{i=1}^3 \omega_i \vec{e}_i(t), \quad \vec{L} = \sum_{i=1}^3 L_i \vec{e}_i(t),$$

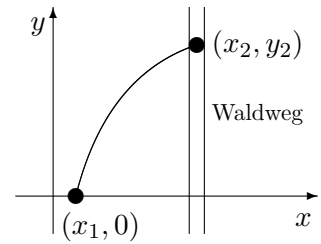
mit den Komponenten ω_i, L_i im körperfesten Koordinatensystem, und finden Sie einen Zusammenhang zwischen $\vec{\omega}, \vec{L}, \vec{e}_3(t)$. Wie bewegen sich $\vec{\omega}$ und $\vec{e}_3$ um den (zeitlich konstanten) Vektor $\vec{L}$? Benutzen Sie dazu die Bewegungsgleichung für im körperfesten Koordinatensystem konstante Vektoren

$$\frac{d\vec{e}_3}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{e}_3.$$

(10 Punkte)

Aufgabe 3: Schlümpfe auf der Flucht

Vor Gargamel flüchtende Schlümpfe durchqueren eine sumpfige (x, y) -Ebene, um einen parallel zur y -Achse verlaufenden geraden Waldweg zu erreichen. Die Geschwindigkeit $v = v(y)$, mit der sie laufen können, hängt von y , aber nicht von x ab. Die Schlümpfe befinden sich zum Zeitpunkt $t = 0$ bei $(x_1, 0)$ und möchten in möglichst kurzer Zeit T ihr Fluchtfahrzeug bei (x_2, y_2) erreichen. Dabei ist $x_2 > x_1 > 0$ und $y_2 > 0$.



- (a) Formulieren Sie das Variationsproblem um den Weg $y(x)$, der die Zeit T minimiert, zu finden. Benutzen Sie dazu $dt = \frac{ds}{v(y)}$ mit dem Wegelement $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ und bestimmen Sie die Funktion $F(y'(x), y(x), x)$ in

$$T = \int_{x_1}^{x_2} dx F(y'(x), y(x), x) \quad (6)$$

(3 Punkte)

- (b) Berechnen Sie die Erhaltungsgröße

$$H = y' \frac{\partial F}{\partial y'} - F. \quad (7)$$

(2 Punkte)

- (c) Lösen Sie die Gleichung $H = -1/c$, wobei $c > 0$ eine Konstante ist, nach y' auf. (2 Punkte)

- (d) Betrachten Sie ab jetzt den Spezialfall $v(y) = ay + v_0$ mit $v_0 > 0$ sowie $\frac{a}{v_0} \geq -\frac{1}{y_2}$. Lösen Sie die in (c) aufgestellte Differentialgleichung, um $y(x)$ für die gegebenen Anfangsbedingungen zu bestimmen. Eliminieren Sie anschließend c zugunsten von $w = \sqrt{c^2 - v_0^2}$. (5 Punkte)

- (e) Eliminieren Sie w zugunsten von $x_2 - x_1$ und y_2 . (3P)

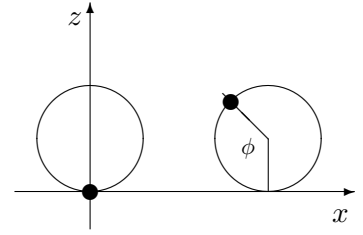
Für welche Werte von a/v_0 hat das Problem eine Lösung? (1P) (4 Punkte)

- (f) Bestimmen Sie T . Sie brauchen dabei w nicht durch $x_2 - x_1$ und y_2 auszudrücken. (4 Punkte)

Aufgabe 4: Rad mit Unwucht

Ein Eisenbahnrad mit Radius R rollt in positiver x -Richtung, die Koordinaten der Radnabe sind also $\vec{r}_N = (x_N, z_N)^T = (R\phi, R)^T$, wobei ϕ der Abrollwinkel ist. Das Rad habe die Masse M und das Trägheitsmoment $\theta = MR^2/2$. Am Rand des Rades ist eine Masse m fixiert, deren Ortsvektor

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \phi - \sin \phi \\ 1 - \cos \phi \end{pmatrix} \quad (8)$$

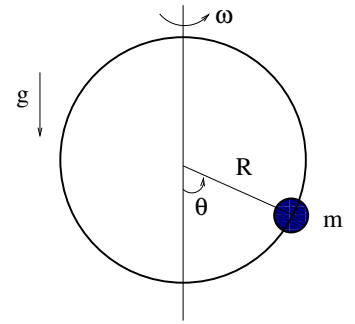


ist. Die Bewegung verläuft im Schwerfeld $-g\vec{e}_z$.

- (a) Berechnen Sie die kinetische Energie T und die potentielle Energie V . (2 Punkte)
- (b) Stellen Sie die Euler-Lagrange'sche Bewegungsgleichung für ϕ auf und lösen Sie sie nach $\ddot{\phi}$ auf. (3 Punkte)
- (c) Drücken Sie $\dot{\phi}^2$ durch ϕ , m , M , R , g und die Gesamtenergie E aus. Eliminieren Sie dann E zugunsten von $\omega_0 \equiv \dot{\phi}(\phi=0)$, der Winkelgeschwindigkeit bei $\phi=0$. (2 Punkte)
- (d) In dieser und den folgenden Teilaufgaben betrachten wir den Fall $m \ll M$.
Auf m wirken neben der Gewichtskraft zwei Zwangskräfte, die Zentripetalkraft und die Zwangskraft $Z^{(S)}$, die die Schiene auf das Rad ausübt. Betrachten Sie $m\ddot{z}$ und identifizieren Sie die z -Komponente $Z_z^{(S)}$. Drücken Sie $Z_z^{(S)}$ durch ϕ aus (d.h. eliminieren Sie $\ddot{\phi}$ und $\dot{\phi}$, wobei Sie zur Ordnung m/M entwickeln dürfen). (5 Punkte)
- (e) Bestimmen Sie bei vorgegebenem ω_0 und R den kleinsten Wert für m/M , der zum Verlust des Rad-Schiene-Kontakts führt. Bei welchen Winkeln ϕ löst sich das Rad dann ab? Geben sie dieses kritische m/M für das numerische Beispiel $R = 0,5 \text{ m}$, $\omega_0 = 100 \text{ s}^{-1}$, $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ an (auf 2 signifikante Stellen gerundet). (3 Punkte)
- (f) Bestimmen Sie $\phi(t)$, entwickelt bis zur Ordnung m/M , für den Fall, dass das Rad noch Kontakt zur Schiene hat. Wählen Sie dabei als Anfangsbedingungen $\phi(t=0) = 0$ und $\dot{\phi}(t=0) = \omega_0$.
Hinweis: Bestimmen Sie in $\phi(t) = \phi^{(0)}(t) + \phi^{(1)}(t)\frac{m}{M} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{m}{M}\right)^2\right)$ zunächst $\phi^{(0)}(t)$. (5 Punkte)

Aufgabe 5: Perle auf rotierendem Draht

Eine Perle der Masse m gleitet reibungsfrei und unter dem Einfluss der Schwerkraft auf einem ringförmigen Draht mit dem Radius R , welcher seinerseits mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ parallel zu $\vec{g}$ um seinen Durchmesser rotiert.



- (a) Stellen Sie die Hamiltonfunktion und die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen für $q \equiv \theta$ und $p_\theta \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}$ auf. (5 Punkte)
- (b) Bestimmen Sie die kritische Winkelgeschwindigkeit Ω , unterhalb derer der tiefste Punkt des Drahtes eine stabile Gleichgewichtslage der Perle ist.
Hinweis: Schreiben Sie die Hamiltonfunktion als $H = \frac{p_\theta^2}{2mR^2} + U_{\text{eff}}(\theta)$ und untersuchen Sie das Verhalten von $U_{\text{eff}}(\theta)$. (5 Punkte)
- (c) Bestimmen Sie die stabile Gleichgewichtslage für $\omega > \Omega$.
 (Damit ist die Lösung $\theta = \theta_0 = \text{const.}$ gemeint.) (5 Punkte)
- (d) Entwickeln Sie (für $\omega > \Omega$) $U_{\text{eff}}(\theta)$ um $\theta = \theta_0$ bis zur Ordnung $(\theta - \theta_0)^2$, so dass Sie das Potential eines harmonischen Oszillators finden. Geben Sie die Kreisfrequenz kleiner Schwingungen der Perle um die Gleichgewichtslage an. (5 Punkte)

1 Lösungen Aufgabe 1

1.1 Lösung (a), 5P

Die Euler-Lagrange'schen Bewegungsgleichungen lauten

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = m\ddot{r} - mr\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta - mr\dot{\theta}^2 + \frac{\partial V}{\partial r} = 0, \quad [2P] \quad (9)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial \phi} = \frac{d}{dt} (mr^2 \dot{\phi} \sin^2 \theta) = 2mr\dot{r}\dot{\phi} \sin^2 \theta + mr^2 \ddot{\phi} \sin^2 \theta + 2mr^2 \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta \sin \theta = 0, \quad [1P] \quad (10)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 2mr\dot{r}\dot{\theta} + mr^2 \ddot{\theta} - mr^2 \dot{\phi}^2 \cos \theta \sin \theta + \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0 \quad [2P] \quad (11)$$

[im zweiten Term muss die totale Zeitableitung nicht unbedingt ausgeführt werden]

1.2 Lösung (b), 5P

(i), 3P: Die Koordinate ϕ ist zyklisch [da L nur von $\dot{\phi}$ abhängt] .

(ii), 2P: Deshalb ist die z -Komponente des Drehimpulses $p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2 \dot{\phi} \sin^2 \theta$ erhalten [’ z -Komponente des Drehimpulses’ ist explizit Teil der Lösung, nur ’Drehimpuls’ ist falsch] .

1.3 Lösung (c), 5P

(i), 2P: Da $\vec{r} \cdot (\vec{n} \times \vec{r}) = \vec{n} \cdot (\vec{n} \times \vec{r}) = 0$, folgt

$$\vec{r}_k^2 \rightarrow \vec{r}_k^2 + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad [1P] \quad (12)$$

$$\vec{n} \cdot \vec{r}_k \rightarrow \vec{n} \cdot \vec{r}_k, \quad [1P] \quad (13)$$

[d.h. $\vec{r}_k^2$ und $\vec{n} \cdot \vec{r}_k$ sind invariant] .

(ii), 2P: Mit dem Noether-Theorem aus der Formelsammlung und $\psi_0 = F = 0$ ist

$$Q = \sum_k \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_k} \cdot (\vec{n} \times \vec{r}_k) = \sum_k \vec{p}_k \cdot (\vec{n} \times \vec{r}_k) = \sum_k (\vec{r}_k \times \vec{p}_k) \cdot \vec{n} = \vec{L} \cdot \vec{n} \quad (14)$$

[1P], wobei $\vec{L} = \sum_k \vec{r}_k \times \vec{p}_k$ der Gesamtdrehimpuls ist [1P; kann auch bei (iii) bewertet werden] .

(iii), 1P: Der Drehimpuls entlang des Vektors $\vec{n}$ ist erhalten [$\vec{L}$ ist nicht notwendigerweise erhalten, da $\vec{n}$ fest ist nach Aufgabenstellung] .

1.4 Lösung (d), 5P

(i), 1P: (Gesamt-)Energieerhaltung .

(ii), 1P: (Gesamt-)Impulserhaltung .

(iii), 3P: $Q = (\vec{P}t - M\vec{r}_s) \cdot \vec{w}$ mit Gesamtimpuls $\vec{P}$, Gesamtmasse M , Schwerpunktkoordinate $\vec{r}_s$ und einem beliebigen Einheitsvektor $\vec{w}$ [Falls „Erhaltungsgröße ist Schwerpunktbewegung“ o.ä. geschrieben wurde, gibt es nur 1P] .

2 Lösungen Aufgabe 2

2.1 Lösung (a), 10P

Die Eulerschen Gleichungen für $\vec{M} = 0$ und $\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta$ lauten

$$\begin{aligned}\Theta\dot{\omega}_1 + (\Theta_3 - \Theta)\omega_2\omega_3 &= 0, \\ \Theta\dot{\omega}_2 - (\Theta_3 - \Theta)\omega_1\omega_3 &= 0, \\ \Theta_3\dot{\omega}_3 &= 0\end{aligned}\tag{15}$$

[1P] . Dies gibt $\omega_3 = \text{konstant}$ [1P] und Ableiten der ersten Gleichung führt zu

$$\begin{aligned}\ddot{\omega}_1 + \tilde{\omega}\dot{\omega}_2 &= 0, \\ \dot{\omega}_2 - \tilde{\omega}\omega_1 &= 0,\end{aligned}\tag{16}$$

[1P] mit

$$\tilde{\omega} = \frac{\Theta_3 - \Theta}{\Theta}\omega_3.\tag{17}$$

Einsetzen der zweiten Gleichung in die erste gibt

$$\ddot{\omega}_1 + \tilde{\omega}^2\omega_1 = 0,\tag{18}$$

[1P] , also die Gleichung des harmonischen Oszillators. Die allgemeine Lösung kann geschrieben werden als

$$\omega_1 = A \cos(\tilde{\omega}t + \varphi),\tag{19}$$

[2P] , wobei A und ϕ aus den Anfangsbedingungen bestimmt werden können. Einsetzen in die erste Gleichung in (1) gibt dann

$$\omega_2 = -\frac{1}{\tilde{\omega}}\dot{\omega}_1 = A \sin(\tilde{\omega}t + \varphi).\tag{20}$$

[1P] . Weiterhin ist

$$L_{1,2} = \Theta\omega_{1,2}, \quad L_3 = \Theta_3\omega_3,\tag{21}$$

[1P] , also beschreiben die Vektoren $\vec{L}_{\text{KS}}, \vec{\omega}_{\text{KS}}$ im körperfesten Koordinatensystem eine Drehung um die $\vec{e}_3$ -Achse mit Kreisfrequenz $\tilde{\omega}$ und Radius ΘA bzw. A [2P] .

2.2 Lösung (b), 10P

Ausschreiben der Vektorgleichungen gibt

$$\vec{L} = \Theta (\omega_1 \vec{e}_1 + \omega_2 \vec{e}_2) + \Theta_3 \omega_3 \vec{e}_3, \quad \vec{\omega} = \omega_1 \vec{e}_1 + \omega_2 \vec{e}_2 + \omega_3 \vec{e}_3, \quad (22)$$

[1P] also

$$\vec{L} = \Theta \vec{\omega} + \omega_3 (\Theta_3 - \Theta) \vec{e}_3, \quad (23)$$

und schließlich

$$\frac{\vec{L}}{\Theta} = \vec{\omega} + \tilde{\omega} \vec{e}_3. \quad (24)$$

[2P] . Also liegen die Vektoren $\vec{L}, \vec{e}_3, \vec{\omega}$ in einer Ebene [1P]. Da keine Drehmomente angreifen ist der Vektor $\vec{L}$ zeitlich konstant. Wir benutzen dann die Bewegungsgleichung für Vektoren die konstant im körperfesten KS sind:

$$\frac{d\vec{e}_3}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{e}_3,$$

was besagt dass $\vec{e}_3$ mit der Kreisfrequenz ω um $\vec{\omega}$ rotiert. Einsetzen von (24) gibt dann

$$\frac{d\vec{e}_3}{dt} = \left(\frac{\vec{L}}{\Theta} - \tilde{\omega} \vec{e}_3 \right) \times \vec{e}_3 = \frac{\vec{L}}{\Theta} \times \vec{e}_3, \quad (25)$$

[2P] , was besagt dass $\vec{e}_3$ mit Kreisfrequenz $\frac{L}{\Theta}$ um $\vec{L}$ rotiert [2P] . Da $\vec{\omega}$ in der gleichen Ebene wie $\vec{e}_3$ liegt, rotiert also auch $\vec{\omega}$ mit derselben Kreisfrequenz $\Omega \equiv \frac{L}{\Theta}$ um $\vec{L}$ [2P] .

3 Lösungen Aufgabe 3

3.1 Lösung (a), 3P

Für die Gesamtzeit T gilt

$$T = \int dt = \int \frac{ds}{v(y)} = \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\sqrt{1 + y'^2(x)}}{v(y)} \quad (26)$$

[2P] , also ist

$$F(y'(x), y(x), x) = F(y'(x), y(x)) = \frac{\sqrt{1 + y'^2(x)}}{v(y)} \quad (27)$$

[1P] .

3.2 Lösung (b), 2P

$$H = y' \frac{\partial F}{\partial y'} - F = y' \frac{y'}{v \sqrt{1 + y'^2}} - \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{v} = -\frac{1}{v \sqrt{1 + y'^2}}. \quad (28)$$

3.3 Lösung (c), 2P

Aus

$$H = -\frac{1}{c} = -\frac{1}{v \sqrt{1 + y'^2}} \quad (29)$$

folgt

$$y' = \frac{1}{v} \sqrt{c^2 - v^2} \quad (30)$$

[nur '+' Lösung, da nach Aufgabenstellung $y' > 0$ [$v > 0$], muss aber nicht kommentiert werden] .

3.4 Lösung (d), 5P

Mittels Separation der Variablen erhalten wir [$v = v(y)$]

$$dy \frac{v}{\sqrt{c^2 - v^2}} = dx \quad (31)$$

[1P] . Da $v = ay + v_0$ linear in y , können wir nach Variablensubstitution das Integral aus der Formelsammlung verwenden:

$$-\sqrt{c^2 - (ay + v_0)^2} + C = ax \quad (32)$$

[1P] . Die Konstante C ist mit der Anfangsbedingung $(x_1, 0)$ gegeben als

$$C = ax_1 + w \quad (33)$$

mit $w = \sqrt{c^2 - v_0^2}$ [1P] . Damit ist

$$y(x) = \sqrt{\left(\frac{v_0}{a}\right)^2 + \frac{2w}{a}(x - x_1) - (x - x_1)^2} - \frac{v_0}{a} \quad (34)$$

[2P; nur '+' Lösung damit Anfangsbedingung erfüllt ist, muss ebenfalls nicht kommentiert werden] .

3.5 Lösung (e), 4P

Wir nutzen den Endpunkt (x_2, y_2) :

$$y_2 = \sqrt{\left(\frac{v_0}{a}\right)^2 + \frac{2w}{a}(x_2 - x_1) - (x_2 - x_1)^2} - \frac{v_0}{a} \quad (35)$$

und erhalten

$$w = \frac{a((x_2 - x_1)^2 + y_2^2) + 2v_0y_2}{2(x_2 - x_1)} \quad (36)$$

[3P] . Damit ist

$$y(x) = \sqrt{\left(\frac{v_0}{a}\right)^2 + \frac{a((x_2 - x_1)^2 + y_2^2) + 2v_0y_2}{a(x_2 - x_1)}(x - x_1) - (x - x_1)^2} - \frac{v_0}{a} \quad (37)$$

Mit $w \geq 0$ [welche die Bedingung $a/v_0 \geq -1/y_2$ impliziert] ist $[x_2 - x_1 \geq 0]$

$$a((x_2 - x_1)^2 + y_2^2) + 2v_0y_2 \geq 0, \quad (38)$$

also

$$\frac{a}{v_0} \geq -\frac{2y_2}{(x_2 - x_1)^2 + y_2^2} \quad (39)$$

[1P] .

3.6 Lösung (f), 4P

Aus der DGL (30) folgt

$$T = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1 + y'^2(x)}}{v(y)} dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{c}{v^2} dx, \quad (40)$$

also mit Substitutionen

$$\begin{aligned} T &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{c}{v_0^2 + 2aw(x - x_1) - a^2(x - x_1)^2} dx = \frac{c}{a^2} \int_0^{x_2 - x_1} \frac{1}{(v_0/a)^2 - 2w/a x - x^2} dx \\ &= \frac{c}{a^2} \int_0^{x_2 - x_1} \frac{1}{(c/a)^2 - (x - w/a)^2} dx = \frac{c}{a^2} \int_{-w/a}^{x_2 - x_1 - w/a} \frac{1}{(c/a)^2 - x^2} dx \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{a} \int_{-w/c}^{a/c(x_2 - x_1) - w/c} \frac{1}{1 - x^2} dx = \frac{1}{a} \tanh^{-1}[x] \Big|_{-w/c}^{a/c(x_2 - x_1) - w/c} \\ &= \frac{1}{a} \left(\tanh^{-1} \left[\frac{a}{c}(x_2 - x_1) - \frac{w}{c} \right] - \tanh^{-1} \left[-\frac{w}{c} \right] \right) \\ &= \frac{1}{2a} \left(\ln \left[\frac{c + a(x_2 - x_1) - w}{c - a(x_2 - x_1) + w} \right] + \ln \left[\frac{c + w}{c - w} \right] \right), \end{aligned} \quad (42)$$

wobei $\tanh^{-1}[x] = 1/2 \ln[(1+x)/(1-x)]$ verwendet wurde [2P bis Gleichung (41), +2P für den letzten oder vorletzten Schritt; verschiedene Darstellungen der letzten beiden Schritte sind als richtig anzuerkennen, insbesondere ist der Weg zur Lösung nicht eindeutig; das Integral kann z.B. auch mittels Partialbruchzerlegung bestimmt werden] .

4 Lösungen Aufgabe 4

4.1 Lösung (a), 2P

Die kinetische Energie ist die Summe aus der kinetischen Energie des Massenpunktes m (T_m) und dem der kinetischen Energie der Scheibe, die sich aus einem Translations- (T_M^{tr}) und Rotationsanteil (T_M^{rot}) zusammensetzt

$$\begin{aligned} T &= T_m + T_M^{\text{tr}} + T_M^{\text{rot}} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}M\dot{r}_N^2 + \frac{1}{2}\theta\dot{\phi}^2 \\ &= mR^2\dot{\phi}^2(1 - \cos\phi) + \frac{1}{2}MR^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{4}MR^2\dot{\phi}^2 = R^2\dot{\phi}^2\left(\frac{3}{4}M + m(1 - \cos\phi)\right) \end{aligned} \quad (43)$$

[1P] . Für die potentielle Energie gilt:

$$V = gR(M + m(1 - \cos\phi)) + V_0 \quad (44)$$

[1P] , wobei die Konstante V_0 so gewählt werden kann, dass

$$V = -mgR\cos\phi \quad (45)$$

[andere Fixierungen von V_0 sind auch richtig] .

4.2 Lösung (b), 3P

Es ist

$$L = T - V = R^2\dot{\phi}^2\left(\frac{3}{4}M + m(1 - \cos\phi)\right) + mgR\cos\phi \quad (46)$$

und damit die Euler-Lagrange'sche Bewegungsgleichung

$$0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial \phi} = R^2\ddot{\phi}\left(\frac{3}{2}M + 2m(1 - \cos\phi)\right) + mR(R\dot{\phi}^2 + g)\sin\phi \quad (47)$$

[2P] . Gelöst nach $\ddot{\phi}$ ergibt sich

$$\ddot{\phi} = -\frac{2m/(3M)(\dot{\phi}^2 + g/R)\sin\phi}{1 + 4m/(3M)(1 - \cos\phi)} \quad (48)$$

[1P] .

4.3 Lösung (c), 2P

Die Gesamtenergie ist gegeben als

$$E = T + V = R^2\dot{\phi}^2\left(\frac{3}{4}M + m(1 - \cos\phi)\right) - mgR\cos\phi \quad (49)$$

[die Gesamtenergie ist, wie V , bis auf eine Konstante fest] und für $\dot{\phi}$ ergibt sich

$$\dot{\phi} = \sqrt{\frac{E + mgR\cos\phi}{R^2(3/4M + m(1 - \cos\phi))}} \quad (50)$$

[1P] . Da $E = \text{const}$, ist

$$\dot{\phi}(\phi = 0) = \omega_0 = \sqrt{\frac{4}{3}\frac{E + mgR}{MR^2}}, \quad (51)$$

also

$$E = \frac{3}{4}\omega_0^2 MR^2 - mgR \quad (52)$$

und damit ist

$$\dot{\phi} = \sqrt{\frac{\omega_0^2 - 4mg/(3MR)(1 - \cos\phi)}{1 + 4/3(1 - \cos\phi)}} \quad (53)$$

[1P] .

4.4 Lösung (d), 5P

Für die Zwangskräfte gilt [$Z^{(P)}$ ist die Zentripetalkraft]

$$m\ddot{\vec{r}} = -mg\vec{e}_z + Z^{(S)} + Z^{(P)} \quad (54)$$

[1P] . In

$$\ddot{\vec{r}} = R\ddot{\phi} \begin{pmatrix} 1 - \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix} + R\dot{\phi}^2 \begin{pmatrix} \sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix} \quad (55)$$

[1P] identifizieren wir den zweiten Term als $Z^{(P)}$, also ist die z -Komponente von $Z^{(S)}$

$$Z_z^{(S)} = mg + mR\ddot{\phi} \sin \phi \quad (56)$$

[1P] . Nun ist [Entwicklung von Gleichungen (48, 53) in m/M ; $\dot{\phi}$ wird bis zur nullten Ordnung benötigt, da $\ddot{\phi}$ bereits $\mathcal{O}(\frac{m}{M})$ ist]

$$\ddot{\phi} = -\frac{2}{3} \frac{m}{M} \left(\dot{\phi}^2 + \frac{g}{R} \right) \sin \phi = -\frac{2}{3} \frac{m}{M} \left(\omega_0^2 + \frac{g}{R} \right) \sin \phi \quad (57)$$

[1P] und damit

$$Z_z^{(S)} = mg - \frac{2}{3} \frac{m^2}{M} (R\omega_0^2 + g) \sin^2 \phi \quad (58)$$

[1P] .

4.5 Lösung (e), 3P

Wir suchen eine Lösung zu $Z_z^{(S)} = 0$:

$$0 = g - \frac{2}{3} \frac{m}{M} (R\omega_0^2 + g) \sin^2 \phi. \quad (59)$$

Da $\sin^2 \phi \leq 1$, folgt daraus

$$\frac{m}{M} = \frac{3g}{2(R\omega_0^2 + g) \sin^2 \phi} \geq \frac{3}{2} \frac{1}{1 + R\omega_0^2/g} = \left[\frac{m}{M} \right]_{\min} \quad (60)$$

[1P] für den minimalen Wert von m/M , sowie

$$\sin^2 \phi = 1 \quad (61)$$

[1P] für diesen Fall, also löst sich das Rad bei den Winkeln $\phi = \pi/2, 3\pi/2$. Für das numerische Beispiel folgt

$$\frac{m}{M} = \frac{3}{2} \frac{1}{1 + 5 \cdot 10^2} \simeq 3.0 \cdot 10^{-3} \quad (62)$$

[1P; der kleinere Beitrag im Nenner kann, im Hinblick auf die signifikanten Stellen, vernachlässigt werden] .

4.6 Lösung (f), 5P

Nach Gleichung (53) ist [Entwicklungen in m/M]

$$\dot{\phi}^2 = \omega_0^2 + \frac{m}{M} \frac{4}{3} \left(\frac{g}{R} + \omega_0^2 \right) (\cos \phi - 1) + \mathcal{O} \left(\left(\frac{m}{M} \right)^2 \right) \quad (63)$$

und weiterhin

$$\dot{\phi}^2 \left(1 - \frac{m}{M} \frac{4}{3} \left(\frac{g}{R\omega_0^2} + 1 \right) (\cos \phi - 1) \right) = \omega_0^2 + \mathcal{O} \left(\left(\frac{m}{M} \right)^2 \right), \quad (64)$$

sowie

$$\dot{\phi} \left(1 - \frac{m}{M} \frac{2}{3} \left(\frac{g}{R\omega_0^2} + 1 \right) (\cos \phi - 1) \right) = \omega_0 + \mathcal{O} \left(\left(\frac{m}{M} \right)^2 \right). \quad (65)$$

Separation der Variablen und Integration gibt

$$\phi - \frac{m}{M} \frac{2}{3} \left(1 + \frac{g}{R\omega_0^2} \right) (\sin \phi - \phi) = \omega_0 t + C \quad (66)$$

mit der Konstanten $C = 0$ aus der Anfangsbedingung $\phi(t = 0) = 0$ [3P; es kann auf verschiedene Wege zu dem Ergebnis gefunden werden, z.B. auch durch Einsetzen von $\phi(t) = \phi^{(0)}(t) + \phi^{(1)}(t) m/M + \dots$ in die Gleichung, die nach dem Wurzelziehen in Gleichung (63) entsteht].

Mit $\phi(t) = \phi^{(0)}(t) + \phi^{(1)}(t) m/M + \mathcal{O}((m/M)^2)$ folgt zunächst [da der zweite Term bereits $\mathcal{O}(m/M)$ ist]

$$\phi^{(0)}(t) = \omega_0 t \quad (67)$$

[1P] , sowie iterativ

$$\phi^{(1)}(t) = \frac{2}{3} \left(1 + \frac{g}{R\omega_0^2} \right) (\sin [\omega_0 t] - \omega_0 t) \quad (68)$$

[1P] .

5 Lösungen Aufgabe 5

5.1 Lösung (a), 5P

Wir führen zuerst Kugelkoordinaten ein

$$x = R \cos \phi \sin \theta, \quad y = R \sin \phi \sin \theta, \quad z = -R \cos \theta, \quad (69)$$

mit der Zwangsbedingung $\dot{\phi} = \omega$. Der kinetische Term ist

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{m}{2} R^2 (\omega^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) \quad (70)$$

[1P] und mit dem Potential $V = mgz = -mgR \cos \theta$ ist die Lagrangefunktion

$$L = \frac{m}{2} R^2 (\omega^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + mgR \cos \theta \quad (71)$$

[1P]. Der zu θ konjugierte Impuls p_θ ist

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mR^2 \dot{\theta}, \quad (72)$$

und die Hamiltonfunktion ist (wir müssen $\dot{\theta}$ durch p_θ ersetzen: $\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mR^2}$)

$$H = \dot{\theta} p_\theta - L = \frac{p_\theta^2}{mR^2} - \frac{m}{2} R^2 \left(\omega^2 \sin^2 \theta + \frac{p_\theta^2}{m^2 R^4} \right) - mgR \cos \theta \quad (73)$$

also schließlich

$$H(\theta, p_\theta) = \frac{p_\theta^2}{2mR^2} - \frac{m}{2} R^2 \omega^2 \sin^2 \theta - mgR \cos \theta \quad (74)$$

[1P] . Die Bewegungsgleichungen sind

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mR^2}, \quad \dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = mR^2 \omega^2 \sin \theta \cos \theta - mgR \sin \theta \quad (75)$$

[2P] .

5.2 Lösung (b), 5P

Wir schreiben

$$H = \frac{p_\theta^2}{2mR^2} + U_{\text{eff}}, \quad U_{\text{eff}} = -\frac{m}{2} R^2 \omega^2 \sin^2 \theta - mgR \cos \theta \quad (76)$$

[1P] . Eine stabile Gleichgewichtslage liegt vor, wenn sich die Perle an einem lokalen Minimum θ_0 von U_{eff} befindet (mit $\dot{\theta} = 0$). Das bedeutet dass

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial U_{\text{eff}}}{\partial \theta} \right|_{\theta_0} &= -mR^2 \omega^2 \sin \theta_0 \cos \theta_0 + mgR \sin \theta_0 = 0, \\ \left. \frac{\partial^2 U_{\text{eff}}}{\partial \theta^2} \right|_{\theta_0} &= -mR^2 \omega^2 (2 \cos^2 \theta_0 - 1) + mgR \cos \theta_0 > 0 \end{aligned} \quad (77)$$

[2P] . Die Bedingung dass für $\omega = \Omega$ der tiefste Punkt $\theta_0 = 0$ stabil ist lautet dann

$$-mR^2 \Omega^2 + mgR > 0 \quad (78)$$

[1P] , also

$$\Omega < \sqrt{g/R} \quad (79)$$

[1P] .

5.3 Lösung (c), 5P

Für $\omega > \Omega$ ist für die stabile Gleichgewichtslage $\sin \theta_0 \neq 0$ [1P] , also lauten die Bedingungen

$$0 = -mR^2\omega^2 \cos \theta_0 + mgR, \quad -mR^2\omega^2 (2 \cos^2 \theta_0 - 1) + mgR \cos \theta_0 > 0 \quad (80)$$

[2P] , und haben die Lösung

$$\cos \theta_0 = \frac{g}{R\omega^2} \quad (81)$$

[2P] .

5.4 Lösung (d), 5P

Wir entwickeln nun das Potential um die Lösung θ_0 mit $\cos \theta_0 = \frac{g}{R\omega^2}$ bis zur zweiten Ordnung in $\theta - \theta_0$. Wir haben bis zu dieser Ordnung

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \sin \theta_0 + \cos \theta_0(\theta - \theta_0) - \frac{1}{2} \sin \theta_0(\theta - \theta_0)^2, \\ \cos \theta &= \cos \theta_0 - \sin \theta_0(\theta - \theta_0) - \frac{1}{2} \cos \theta_0(\theta - \theta_0)^2 \end{aligned} \quad (82)$$

[1P] , also

$$\begin{aligned} U_{\text{eff}} &= -mR \left(\frac{R}{2} \omega^2 \sin^2 \theta + g \cos \theta \right) \\ &= -mR \left[\frac{R}{2} \omega^2 (\sin^2 \theta_0 + 2 \sin \theta_0 \cos \theta_0(\theta - \theta_0) + \cos^2 \theta_0(\theta - \theta_0)^2 - \sin^2 \theta_0(\theta - \theta_0)^2) \right] \\ &\quad - mRg \left(\cos \theta_0 - \sin \theta_0(\theta - \theta_0) - \frac{1}{2} \cos \theta_0(\theta - \theta_0)^2 \right) \end{aligned} \quad (83)$$

Wir benutzen nun zuerst $g = R\omega^2 \cos \theta_0$

$$\begin{aligned} U_{\text{eff}} &= -\frac{m}{2} R^2 \omega^2 (\sin^2 \theta_0 + 2 \sin \theta_0 \cos \theta_0(\theta - \theta_0) + \cos^2 \theta_0(\theta - \theta_0)^2 - \sin^2 \theta_0(\theta - \theta_0)^2) \\ &\quad - mR^2 \omega^2 \left(\cos^2 \theta_0 - \sin \theta_0 \cos \theta_0(\theta - \theta_0) - \frac{1}{2} \cos^2 \theta_0(\theta - \theta_0)^2 \right) \\ &= -\frac{m}{2} R^2 \omega^2 [1 + \cos^2 \theta_0 - (1 - \cos^2 \theta_0)(\theta - \theta_0)^2] \\ &= -\frac{m}{2} R^2 \omega^2 \left[1 + \frac{g^2}{R^2 \omega^4} - \left(1 - \frac{g^2}{R^2 \omega^4} \right) (\theta - \theta_0)^2 \right] \end{aligned} \quad (84)$$

[1P] . Bis auf eine unbedeutende Konstante ist also

$$U_{\text{eff}} = \frac{m}{2} R^2 \omega^2 \left(1 - \frac{g^2}{R^2 \omega^4} \right) \Delta \theta^2 \quad (85)$$

mit $\Delta \theta = \theta - \theta_0$, also ein rein quadratisches Potential in $\Delta \theta$ mit positivem Vorfaktor, was genau der harmonische Oszillator ist [1P] . Für die Frequenz schreiben wir die Bewegungsgleichung für $\Delta \theta$ mit dem kinetischen Term ($\dot{\Delta \theta} = \dot{\theta}$)

$$\ddot{\Delta \theta} = \frac{\dot{p}_{\Delta \theta}}{mR^2} = -\frac{1}{mR^2} \frac{\partial U_{\text{eff}}}{\partial \Delta \theta} = -\omega^2 \left(1 - \frac{g^2}{R^2 \omega^4} \right) \Delta \theta \quad (86)$$

[1P] , also ist die Schwingungsfrequenz um die stabile Gleichgewichtslage θ_0 gegeben durch

$$\tilde{\omega} = \omega \sqrt{1 - \frac{g^2}{R^2 \omega^4}} \quad (87)$$

[1P] .