Karlsruhe Institute of Technology

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. U. Nierste, Dr. R. Ziegler, Simon Kast

https://www.ttp.kit.edu/courses/ss2017/theob/start

Klassische Theoretische Physik II

Erste Klausur

Sommersemester 2017

Abgabe: 24.7.2017 nach 2 Stunden

Vorname:

Familienname:

E-Mail-Adresse:

Matrikelnummer: **Tutorium:**

Studienfach:

Versuch: erster ☐ zweiter ☐

A1 (20P)		a)(5P)	b)(5P)	c)(5P)	d)(5P)	
A2 (20P)		a)(8P)	b)(10P)	c)(2P)		
A3 (20P)		a)(5P)	b)(5P)	c)(5P)	d)(5P)	
A4 (20P)		a)(2P)	b)(3P)	c)(2P)	d)(3P)	e)(3P)
		f) (3P)	g)(2P)	h) (2P)		
A5 (20P)		a)(3P)	b)(3P)	c)(7P)	d)(5P)	e)(2P)
Σ (100P)						

Lesen Sie den folgenden Text zu Beginn der Klausur bitte sorgfältig durch!
Bitte schreiben Sie oben in jedes Kästchen maximal einen Buchstaben oder eine Ziffer. Schreiben Sie nichts in die Punktetabelle, sie dient der Korrektur. Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer und nummerieren Sie Ihre Blätter fortlaufend durch. **Beginnen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt**. Was nicht bewertet werden soll, ist deutlich durchzustreichen. Bitte kennzeichnen Sie die Endergebnisse der Teilaufgaben deutlich, z.B. durch doppeltes Unterstreichen. Wenn Sie mehr Papier brauchen, heben Sie bitte die Hand.
Legen Sie bitte zu Beginn der Klausur Ihren Studentenausweis neben sich auf den Tisch; er wird während der Klausur kontrolliert. Wer seinen Studentenausweis vergessen hat, verwendet einen anderen Lichtbildausweis. Die Benutzung elektronischer Geräte (Taschenrechner, Mobiltelefone, Tablet-Computer,...) oder anderer Hilfsmittel (Fachbücher, Aufzeichnungen, ältere Geschwister...) ist nicht gestattet. **b.w.**

Wer zur Toilette geht, gibt das Aufgabenblatt und seine Lösungen beim Aufsichtspersonal ab und erhält alles anschließend zurück. Es ist erlaubt, die bearbeitete Klausur vor Ablauf der Bearbeitungszeit von 2 Zeitstunden abzugeben und den Raum zu verlassen. Jedoch: In den letzten 20 Minuten der Bearbeitungszeit darf niemand mehr den Raum verlassen!
Heften Sie die Blätter mit Ihren Lösungen der Klausuraufgaben zusammen, mit diesem Deckblatt als erster Seite. (Die Klausuraufsicht hilft beim Klammern; die Verantwortung für die Vollständigkeit der eingereichten Klausur liegt jedoch bei Ihnen.) Der Aufgabenzettel muss nicht abgegeben werden. Bitte schreiben Sie auch keine Lösungen auf den Aufgabenzettel. Es gibt keine Punkte auf richtiges Rechnen mit falschem Ansatz!
Hinreichend zum Bestehen der Klausur sind 50 Punkte.
Empfehlung: Lesen Sie unbedingt vor der Bearbeitung der Aufgaben die **Formelsammlung** durch, damit Sie auf die richtigen Ideen kommen. Sie dürfen sich ohne Beweis auf diese Formeln beziehen.

Formelsammlung

Integrale:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1-\cos z}} = \sqrt{2}\ln\tan\frac{z}{4} + C \tag{1}$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z^2-1}} = \ln(z+\sqrt{z^2-1}) + C \tag{2}$$

$$\int dz \frac{z^2}{\sqrt{z^2-1}} = \frac{1}{2}\left[z\sqrt{z^2-1} + \ln\left(\sqrt{z^2-1}+z\right)\right] + C \tag{3}$$

Noether-Theorem:

$$q_k' = q_k + \epsilon\psi_k, \qquad t' = t + \epsilon\psi_0, \qquad L' = L + \epsilon\frac{d}{dt}F$$

$$Q = \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\psi_k + \left(L - \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k\right)\psi_0 - F \tag{4}$$

Winkelfunktionen:

$z =$	$1/6$	$1/3$	$1/2$	$2/3$	$3/4$	$5/6$
$\arccos z =$	$80.4°$	$70.5°$	$60°$	$48.2°$	$41.4°$	$33.6°$
$\sin\arccos z =$	$\frac{\sqrt{35}}{6}$	$\frac{2\sqrt{2}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{5}}{3}$	$\frac{\sqrt{7}}{4}$	$\frac{\sqrt{11}}{6}$

(5)

Aufgabe 1: Panorama

In dieser Aufgabe geht es um allgemeines Physik-Verständnis, es sind nur wenige Rechenschritte nötig.

(a) Betrachten Sie $L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2\right) - V(r,z)$ und geben Sie die Euler-Lagrangeschen Bewegungsgleichungen für die verallgemeinerten Koordinaten r, ϕ und z (Zylinderkoordinaten) an.

(5 Punkte)

(b) (i) Welche Koordinate(n) in Teilaufgabe (a) ist/sind zyklisch? (3P)
(ii) Welche Erhaltungsgröße(n) gehört/gehören dazu? (2P) (5 Punkte)

(c) Betrachten Sie die Lagrangefunktion

$$L(q_k, \dot{q}_k, t) = \sum_{k,l=1}^{N} \frac{1}{2}\alpha_{kl}\dot{q}_k\dot{q}_l - V \qquad \text{mit} \qquad \alpha_{kl} = \alpha_{lk},$$

wobei $\alpha_{kl} = \alpha_{kl}(q_j)$ und $V = V(q_j)$ von den verallgemeinerten Koordinaten q_j, aber nicht von $\dot{q}_j$ abhängen. L sei invariant unter der infinitesimalen Transformation

$$q_1 \to q_1' = q_1 + \epsilon, \qquad q_k \to q_k' = q_k \quad \text{für } k \geq 2, \qquad t' = t$$

(i) Berechnen Sie die zugehörige Erhaltungsgröße Q. (2P)
(ii) Betrachten Sie den Fall eines Massenpunktes mit Masse m und $q_k = x_k$ (kartesische Koordinaten), für den $N = 3$ und $\alpha_{kl} = m\delta_{kl}$ ist, und berechnen Sie die Erhaltungsgröße Q. Welche physikalische Bedeutung hat Q? (1P)
(iii) Betrachten Sie nun den analogen Fall mit $q_1 = \phi$, $q_2 = r$, $q_3 = z$ für Zylinderkoordinaten (r, ϕ, z). Geben Sie α_{kl} (ohne Herleitung) und Q an. Welche physikalische Bedeutung hat nun Q? (2P)

(5 Punkte)

(d) Ein sich kräftefrei bewegender Satellit habe den Trägheitstensor

$$\theta = \begin{pmatrix} \theta_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \theta_{22} & \theta_{23} \\ 0 & \theta_{23} & \theta_{22} \end{pmatrix}, \qquad \text{mit} \qquad \theta_{kl} > 0,\ \theta_{23} < \theta_{22}.$$

(i) Bestimmen Sie die Hauptträgheitsmomente θ_1, θ_2 und θ_3. (2P)
(ii) Für welche Werte von θ_{11} ist die Rotation um die x-Achse stabil? (1P)
(iii) Es sei nun allgemein $\theta_1 = \theta_2 < \theta_3$. Der Satellit werde in Rotation um die Hauptachse zu θ_3 versetzt; dann wird die Bewegung leicht gestört, sodass $0 < \omega_{1,2} \ll \omega_3$ gilt. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(iiia) Die Rotationsachse führt eine Präzessionsbewegung aus.
(iiib) Die Winkelgeschwindigkeit nimmt ab und geht asymptotisch gegen Null.

Sie brauchen Ihre Antworten nicht zu begründen. (2P) (5 Punkte)

Aufgabe 2: Galilei-Transformation

Betrachten Sie ein System aus N Massenpunkten mit Lagrangefunktion

$$L(\vec{r}_k, \dot{\vec{r}}_k) = \sum_{k=1}^{N} \frac{m_k}{2} \dot{\vec{r}}_k^{\,2} - \sum_{j \neq l} V(\vec{r}_j - \vec{r}_l). \tag{6}$$

(a) Berechnen Sie, wie sich L unter den infinitesimalen Transformationen

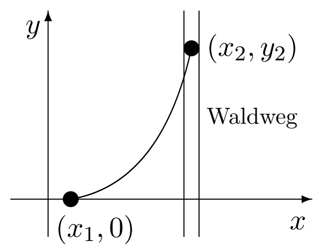
$$\vec{r}_k \to \vec{r}_k{}' = \vec{r}_k + \epsilon \vec{w} t \qquad \text{für jedes } k = 1, \ldots N, \qquad\qquad t \to t' = t$$

transformiert, wobei $\vec{w}$ ein beliebiger Einheitsvektor ist. Drücken Sie $\frac{d}{d\epsilon} L(\vec{r}_k + \epsilon \vec{w} t, \dot{\vec{r}}_k + \epsilon \vec{w})|_{\epsilon=0}$ durch die Gesamtmasse $M = \sum_{k=1}^{N} m_k$ und die Schwerpunktskoordinate $\vec{r}_S = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{N} m_k \vec{r}_k$ aus. (8 Punkte)

(b) Bestimmen Sie die drei erhaltenen Noether-Ladungen zur Transformation in Gl. (6) für die Fälle $\vec{w} = \vec{e}_j$, $j = 1, 2, 3$, und fassen Sie sie zu einer vektoriellen Erhaltungsgröße zusammen. Drücken Sie das Ergebnis durch M, $\vec{r}_S$ und den Gesamtimpuls P der N Teilchen aus. (10 Punkte)

(c) Verwenden Sie das Ergebnis aus Teilaufgabe b), um die Schwerpunktsbewegung $\vec{r}_S(t)$ zu berechnen. Eliminieren Sie die Noether-Ladung zugunsten von $\vec{r}_S(0)$. (2 Punkte)

Aufgabe 3: Zwerge auf der Flucht



Flüchtende Zwerge durchqueren eine sumpfige (x, y)-Ebene, um einen parallel zur y-Achse verlaufenden geraden Waldweg zu erreichen. Die Geschwindigkeit $v = v(x)$, mit der sie laufen können, hängt von x, aber nicht von y ab. Die Zwerge befinden sich zum Zeitpunkt $t = 0$ bei $(x_1, 0)$ und möchten in möglichst kurzer Zeit T den Punkt (x_2, y_2) erreichen, an dem Schneewittchen mit einem Fluchtfahrzeug wartet. Dabei ist $x_2 > x_1 > 0$ und $y_2 > 0$.

(a) Formulieren Sie das Variationsproblem um den Weg $y(x)$, der die Zeit T minimiert, zu finden. Benutzen Sie dazu $dt = \frac{ds}{v(x)}$ mit dem Wegelement $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ und bestimmen Sie die Funktion $F(y'(x), y(x), x)$ in

$$T = \int_{x_1}^{x_2} dx\, F(y'(x), y(x), x) \tag{7}$$

(5 Punkte)

(b) Zeigen Sie, dass im vorliegenden Fall die Lösung des Variationsproblems durch

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = c \tag{8}$$

mit einer Integrationskonstanten c gegeben ist. Lösen Sie Gl. (8) nach $y'(x)$ auf, um $y'(x)$ durch $v(x)$ und c auszudrücken. Betrachten Sie nur Lösungen mit $y'(x) > 0$. (5 Punkte)

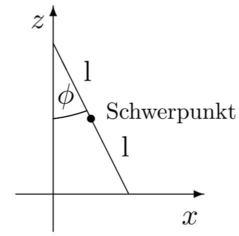
(c) Betrachten Sie ab jetzt den Spezialfall $v(x) = b/x$ mit $b > 0$. Drücken Sie die Zeit T in Gl. (7) durch x_1, x_2, b und c aus und stellen Sie sicher, dass die Argumente der Logarithmen dimensionslos sind.

(5 Punkte)

(d) Bestimmen Sie $y(x)$. Eliminieren Sie die Integrationskonstante, die Sie in diesem Schritt finden, mit Hilfe der Anfangsbedingung $y(x_1) = 0$, so dass Sie $y(x)$ als Funktion von x, x_1, c und b erhalten. Geben Sie die Gleichung an, die cb mit x_1, x_2 und y_2 verknüpft. Sie brauchen die Gleichung weder zu lösen noch zu vereinfachen. (5 Punkte)

Aufgabe 4: Rutschende Leiter

Eine Leiter der Länge $2l$ lehnt an einer durch $x = 0$ definierten Wand an und rutscht reibungsfrei in der x-z-Ebene nach unten. Wir wählen die Koordinaten des Schwerpunkts als $x = l \sin\phi$ und $z = l \cos\phi$, vernachlässigen die Querschnittsfläche A der Leiter und nehmen ihre Dichte ρ als konstant an.



(a) Berechnen Sie das Trägheitsmoment

$$\theta = A\rho \int_{-l}^{l} dz\, z^2$$

für die Drehung um den Schwerpunkt, ausgedrückt durch die Masse m der Leiter. Bestimmen Sie die Rotationsenergie $T_{\text{rot}} = \frac{\theta}{2}\dot{\phi}^2$. (2 Punkte)

(b) Berechnen Sie die kinetische Energie T_S aus der Schwerpunktsbewegung, ausgedrückt durch $\dot{\phi}$, und geben Sie $T = T_{\text{rot}} + T_S$ an. (3 Punkte)

(c) Geben Sie die Lagrangefunktion für die Bewegung des Schwerpunkts im Schwerefeld mit $\vec{F} = -mg\vec{e}_z$ an und stellen Sie die Bewegungsgleichung für ϕ auf. Normieren das Potential so, dass $V(z = 0) = 0$ ist. (2 Punkte)

(d) Führen Sie die erste Integration aus, um $\ddot{\phi}$ zu eliminieren und $\dot{\phi}$ durch ϕ auszudrücken, wobei Sie die Integrationskonstante mit Hilfe der Anfangsbedingung eliminieren, dass die Leiter zum Zeitpunkt $t = 0$ die Neigung ϕ_0 und die Energie $T + V = mgl$ hat. Verwenden Sie diese Anfangsbedingungen in dieser und allen folgenden Teilaufgaben. (3 Punkte)

(e) Lösen Sie die Bewegungsgleichung für $\phi(t)$. (3 Punkte)

(f) Bestimmen Sie die x-Komponente der Zwangskraft (als Funktion von ϕ), die auf den Schwerpunkt wirkt. Bei welchem Winkel ϕ_{krit} löst sich die Leiter von der Wand? (3 Punkte)

(g) Bestimmen Sie die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\phi}_{\text{krit}}$ beim Ablösen. (2 Punkte)

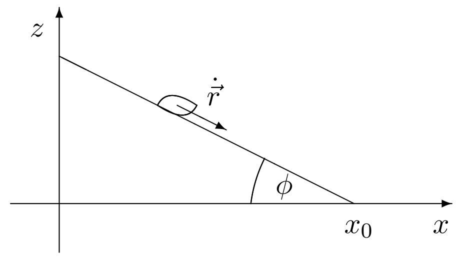
(h) Geben Sie die x-Koordinate $x(t)$ des Schwerpunkts für $\phi \geq \phi_{\text{krit}}$ an. (2 Punkte)

Aufgabe 5: Paketrutsche

Auf einer durch

$$z = (x_0 - x)\tan\phi \qquad \text{mit } 0 < \phi < \pi/2 \text{ fest}, \quad x_0 > 0,$$

definierten Rampe rutsche in der x-z-Ebene ein Paket mit Masse m und Ortsvektor $\vec{r}(t) = (x(t), 0, z(t))^T$ herab. Es wirke die Schwerkraft $-mg\vec{e}_z$ und die Stokes'sche Reibungskraft $\vec{F}_R = -\alpha\dot{\vec{r}}$ mit $\alpha > 0$.



(a) Bestimmen Sie die Lagrangefunktion $L = T - V$, wobei in V nur die Schwerkraft zu berücksichtigen ist, als Funktion von x und $\dot{x}$. (3 Punkte)

(b) Bestimmen Sie die generalisierte Reibungskraft $Q = \vec{F}_R \cdot \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial x}$ (3 Punkte)

(c) Lösen Sie die Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = Q \tag{9}$$

um $x(t)$ zur Anfangsbedingung $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ (die wir auch in den folgenden Teilaufgaben betrachten) zu finden. (7 Punkte)

(d) Entwickeln Sie $x(t)$ um $\alpha = 0$ zur niedrigsten nichtverschwindenden Ordnung, um den Grenzfall ohne Reibung zu erhalten. (5 Punkte)

(e) Bestimmen Sie analog den führenden Term im Grenzfall großer Reibung. (2 Punkte)

1 Lösungen Aufgabe 1

1.1 Lösung (a), 5P

Die Euler-Lagrange-Gleichungen lauten

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot r} - \frac{\partial L}{\partial r} = m\ddot r - mr\dot\phi^2 + \frac{\partial V}{\partial r} = 0\,, \quad [2P] \tag{10}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\phi} - \frac{\partial L}{\partial \phi} = \frac{d}{dt}\left(mr^2\dot\phi\right) = m\left(2r\dot r\dot\phi + r^2\ddot\phi\right) = 0\,, \quad [2P] \tag{11}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot z} - \frac{\partial L}{\partial z} = m\ddot z + \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \quad [1P] \tag{12}$$

1.2 Lösung (b), 5P

i), 3P: Die Koordinate ϕ ist zyklisch [da L nur von $\dot\phi$ abhängt].
ii), 2P: Deshalb ist der konjugierte Impuls $p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot\phi} = mr^2\dot\phi$ erhalten [in der Tat ist dies die Bewegungsgleichung für ϕ, Gleichung (11)]

1.3 Lösung (c), 5P

i), 2P: Wir benutzen das Noethetheorem in der Formelsammlung, nur $\psi_1 = 1$ ist verschieden von 0. Also ist die Erhaltungsgrösse

$$Q = \frac{\partial L}{\partial \dot q_1} = \frac{1}{2}\sum_k \alpha_{k1}\dot q_k + \frac{1}{2}\sum_l \alpha_{1l}\dot q_l = \sum_k \alpha_{k1}\dot q_k\,. \tag{13}$$

[1. Schritt 1P , 2. Schritt 1P] ii), 1P: Wi haben mit $\alpha_{kl} = m\delta_{kl}$ und $q_k = x_l$

$$Q = \sum_k \alpha_{k1}\dot q_k = \alpha_{11}\dot q_1 = m\dot x_1\,. \tag{14}$$

Q ist die x_1-Komponente des Impuls des Massenpunktes.

iii), 2P: Den kinetischen Term für Zylinderkoordinaten können wir in in Aufgabe 1 ablesen, also

$$\alpha_{11} = mr^2\,, \qquad \alpha_{22} = m\,, \qquad \alpha_{33} = m\,, \tag{15}$$

und alles anderen Komponenten sind 0. Damit ist

$$Q = \sum_k \alpha_{k1}\dot q_k = \alpha_{11}\dot q_1 = mr^2\dot\phi\,, \tag{16}$$

[1P] und ist die z-Komponente des Drehimpulses. [1P]

1.4 Lösung (d), 5P

i), 2P: Die Hauptträgheitsmomente sind die Eigenwerte von θ, also θ_{11} und

$$\theta_\pm = \theta_{22} \pm \sqrt{\theta_{22}^2 - \left(\theta_{22}^2 - \theta_{23}^2\right)} = \theta_{22} \pm \theta_{23} \tag{17}$$

Deshalb (die Anordnung ist beliebig)

$$\theta_1 = \theta_{11}\,, \qquad \theta_2 = \theta_{22} - \theta_{23}\,, \qquad \theta_3 = \theta_{22} + \theta_{23}\,. \tag{18}$$

1P (θ_1) + 1P ($\theta_{2,3}$) ii), 1P: Die Drehung um die x-Achse ist stabil, wenn das zugehörige Trägheitsmoment $\theta_{11} = \theta_1$ NICHT zwischen θ_2 und θ_3 liegt, also wegen $\theta_2 < \theta_3$ für

$$\theta_{11} \geq \theta_3 = \theta_{22} - \theta_{23}\,, \tag{19}$$

oder

$$\theta_{11} \leq \theta_2 = \theta_{22} + \theta_{23}\,. \tag{20}$$

iii), 2P:

(iiia)	**KORREKT**
(iiib)	**FALSCH**

2 Lösungen Aufgabe 2

2.1 Lösung (a), 8P

Das Potential V ist offensichtlich invariant, wegen $\dot{\vec{r}}_k \to \dot{\vec{r}}_k + \epsilon\vec{w}$ transformiert sich der kinetische Term wie

$$\dot{\vec{r}}_k^2 \to \dot{\vec{r}}_k^2 + 2\epsilon\dot{\vec{r}}_k\vec{w} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{21}$$

[2P] und deshalb

$$L \to L + \sum_k m_k\epsilon\dot{\vec{r}}_k\vec{w} + \mathcal{O}(\epsilon^2)\,, \tag{22}$$

[2P] also

$$\frac{d}{d\epsilon}L(\vec{r}_k + \epsilon\vec{w}t, \dot{\vec{r}} + \epsilon\vec{w})|_{\epsilon=0} = \sum_k m_k\dot{\vec{r}}_k\vec{w} = M\dot{\vec{r}}_S\cdot\vec{w} = \frac{d}{dt}\left(M\vec{r}_S\cdot\vec{w}\right)\,, \tag{23}$$

1 Schritt 2P, 2.SChritt 2P

2.2 Lösung (b), 10P

Die erhaltene Noetherladung ist (damit V invariant ist muss über alle k summiert werden)

$$Q = \sum_i\sum_k \frac{\partial L}{\partial\dot{x}_i^{(k)}}\psi_i^{(k)} - F \tag{24}$$

[4P] mit

$$\psi_i^{(k)} = w_i t\,, \qquad\qquad F = M\vec{r}_S\cdot\vec{w}\,. \tag{25}$$

Also

$$Q = \sum_i\sum_k m_k\dot{x}_i^{(k)}w_i t - M\vec{r}_S\cdot\vec{w} = \sum_k m_k\dot{\vec{r}}_k\cdot\vec{w}t - M\vec{r}_S\cdot\vec{w} = \vec{P}\cdot\vec{w}t - M\vec{r}_S\cdot\vec{w}\,. \tag{26}$$

1 .Schritt 2P, 2. Schritt 2P Dies gilt für alle $\vec{w}$, also ist der gesamte Vektor $\vec{Q}$ erhalten:

$$\vec{Q} = \vec{P}t - M\vec{r}_S\,. \tag{27}$$

[2 P]

2.3 Lösung (c), 2P

Wir haben mit $\vec{P} = M\dot{\vec{r}}_S$

$$M\dot{\vec{r}}_S t = \vec{Q} + M\vec{r}_S(t) = M\left(\vec{r}_S(t) - \vec{r}_S(0)\right)\,, \tag{28}$$

[1P] wobei wir $\vec{Q} = \vec{Q}(0) = -M\vec{r}_S(0)$ benutzt haben. Die Lösung dieser Gleichung ist

$$\vec{r}_S(t) = \dot{\vec{r}}_S(0)t + \vec{r}_S(0)\,, \tag{29}$$

[1P] also bewegt sich der Schwerpunkt gleichförmig. Volle Punkte gibt es auch wenn $P = \text{const}$ benutzt wurde

3 Lösungen Aufgabe 3

3.1 Lösung (a), 5P

Für die Gesamtzeit T gilt

$$T = \int dt = \int \frac{ds}{v(x)} = \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\sqrt{1 + y'^2(x)}}{v(x)}\,, \tag{30}$$

[3P] also

$$F(y'(x), y(x), x) = F(y'(x), x) = \frac{\sqrt{1 + y'^2(x)}}{v(x)}\,. \tag{31}$$

[2P]

3.2 Lösung (b), 5P

Allgemein gilt für die Lösung des Variationsproblems

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0\,, \tag{32}$$

also hier da F nicht explizit von y abhängt

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0\,, \tag{33}$$

[3P] und deshalb

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = c\,, \tag{34}$$

mit eine Konstanten c. Wir haben explizit

$$c = \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{v\sqrt{1 + y'^2}}\,, \tag{35}$$

also aufgelöst

$$y'^2 = \frac{c^2 v^2}{1 - c^2 v^2}\,, \qquad\qquad y' = \frac{cv}{\sqrt{1 - c^2 v^2}}\,. \tag{36}$$

[2P]

3.3 Lösung (c), 5P

Wir haben

$$T = \int_{x_1}^{x_2} F dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1 + y'^2(x)}}{v(x)} dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{v\sqrt{1 - c^2 v^2}} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{b/x\sqrt{1 - b^2 c^2/x^2}} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx x^2}{b^2 c\sqrt{x^2/(b^2 c^2) - 1}} \tag{37}$$

1. Schritt 1P, letzter Schritt 2P/ Mit der Variablensubstitution $z = x/(bc), dz = dx/(bc)$ ist mit dem angegeben Integral

$$\begin{aligned} T &= bc^2 \int_{x_1/(bc)}^{x_2/(bc)} \frac{z^2}{\sqrt{z^2-1}} dz \\ &= \frac{bc^2}{2} \left[z\sqrt{z^2-1} + \ln\left(\sqrt{z^2-1} + z\right) \right]_{x_1/(bc)}^{x_2/(bc)} \\ &= \frac{bc^2}{2} \left[\frac{x_2}{bc} \sqrt{x_2^2/(b^2c^2) - 1} - \frac{x_1}{bc} \sqrt{x_1^2/(b^2c^2) - 1} + \ln \frac{\sqrt{x_2^2/(b^2c^2) - 1} + x_2/(bc)}{\sqrt{x_1^2/(b^2c^2) - 1} + x_1/(bc)} \right] \end{aligned} \tag{38}$$

1. Schritt 1P, Ergebnis 1P

3.4 Lösung (d), 5P

Wir müssen die folgende DGL lösen:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{bc/x}{\sqrt{1 - b^2c^2/x^2}} \tag{39}$$

[2P] also

$$\int_{y(x_1)}^{y} dy = \int_{x_1}^{x} \frac{bc}{x\sqrt{1 - b^2c^2/x^2}} dx = \int_{x_1}^{x} \frac{dx}{\sqrt{x^2/(b^2c^2) - 1}} . \tag{40}$$

[1P] Mit der Variablensubstitution $z = x/(bc), dz = dx/(bc)$ und $y(x_1) = 0$ ist

$$\begin{aligned} y(x) &= bc \int_{x_1/(bc)}^{x/(bc)} \frac{dz}{\sqrt{z^2-1}} \\ &= bc \ln \frac{x/(bc) + \sqrt{x^2/(b^2c^2) - 1}}{x_1/(bc) + \sqrt{x_1^2/(b^2c^2) - 1}} . \end{aligned} \tag{41}$$

[1P] wobei wir das angegebene Integral benutzt haben. Wir haben noch die Randbedingung $y(x_2) = y_2$ die wir benutzen können um c durch y_2 auszudrücken. Die bestimmende (transzendente) Gleichung ist

$$y_2 = bc \ln \frac{x_2/(bc) + \sqrt{x_2^2/(b^2c^2) - 1}}{x_1/(bc) + \sqrt{x_1^2/(b^2c^2) - 1}} . \tag{42}$$

[1P]

4 Lösungen Aufgabe 4

4.1 Lösung (a), 2P

Das Trägheitsmoment f ur Drehungen um den Schwerpunkt ist

$$\theta = A\rho \int_{-l}^{l} dz\, z^2 = A\rho \frac{2}{3} l^3 = \frac{m}{3} l^2 \,,$$

[1P] mit der Masse $m = 2A\rho l$. Die zugehörige Rotationsenergie ist

$$T_{\text{rot}} = \frac{m}{6} l^2 \dot{\phi}^2 \,. \tag{43}$$

[1P]

4.2 Lösung (b), 3P

Die Schwerpunktskoordinaten sind

$$\vec{r}_S = \begin{pmatrix} l \sin\phi \\ 0 \\ l\cos\phi \end{pmatrix} , \qquad \dot{\vec{r}}_S = \begin{pmatrix} l\dot{\phi}\cos\phi \\ 0 \\ -l\dot{\phi}\sin\phi \end{pmatrix} , \tag{44}$$

[1P] also ist die kinetische Energie T_S aus der Schwerpunktsbewegung

$$T_S = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}_S^{\,2} = \frac{m}{2} l^2 \dot{\phi}^2 \,, \tag{45}$$

[1P] und die gesamte kinetische Energie

$$T = T_{\text{rot}} + T_S = \frac{2}{3} m l^2 \dot{\phi}^2 \,. \tag{46}$$

[1P]

4.3 Lösung (c), 2P

Die potentielle Energie ist (normiert auf $V(z = 0) = 0$)

$$V = mgz = mgl\cos\phi \,, \tag{47}$$

also ist die Lagrangefunktion

$$L = T - V = \frac{2}{3} m l^2 \dot{\phi}^2 - mgl\cos\phi \,. \tag{48}$$

[1P] Mit

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \frac{4}{3} m l^2 \dot{\phi} \,, \qquad \frac{\partial L}{\partial \phi} = mgl\sin\phi \,, \tag{49}$$

ist die Bewegungsgleichung

$$\frac{4}{3} m l^2 \ddot{\phi} - mgl\sin\phi = 0 \,. \tag{50}$$

[1P]

4.4 Lösung (d), 3P

Die Energie $E = T + V$ ist erhalten da L nicht explizit von der Zeit abhängt. Mit der gegeben Anfangsbedingung $E = mgl$ ist

$$E = \frac{2}{3} m l^2 \dot{\phi}^2 + mgl \cos\phi = mgl \,, \tag{51}$$

[1P] also ($\dot{\phi} > 0$)

$$\dot{\phi}^2 = \frac{3g}{2l} \left(1 - \cos\phi\right) \,, \qquad \dot{\phi} = \frac{1}{T} \sqrt{1 - \cos\phi} \,, \qquad T = \sqrt{\frac{2l}{3g}} \,. \tag{52}$$

[2P]

4.5 Lösung (e), 3P

Integrieren mit der Anfangsbedingung $\phi(0) = \phi_0$ gibt

$$\int_{\phi_0}^{\phi} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \cos\phi}} = \int_0^t \frac{dt}{T} = \frac{t}{T} \,, \tag{53}$$

[2P] und mit dem angegebenen Integral ist

$$\frac{t}{T} = \sqrt{2} \ln \frac{\tan \frac{\phi}{4}}{\tan \frac{\phi_0}{4}} \,, \tag{54}$$

oder schließlich

$$\phi(t) = 4 \arctan \left[\tan \frac{\phi_0}{4} e^{\frac{t}{\sqrt{2} T}} \right] \,. \tag{55}$$

[1P]

4.6 Lösung (f), 3P

Die x-Komponente der Zwangskraft ist

$$F_x = m\ddot{x} = ml \left(\ddot{\phi} \cos\phi - \dot{\phi}^2 \sin\phi \right) \,, \tag{56}$$

[1P] und mit der Bewegunsgleichung und Gleichung (50)

$$F_x = ml \left[\cos\phi \left(\frac{3g}{4l} \sin\phi \right) - \sin\phi \left(\frac{3g}{2l} (1 - \cos\phi) \right) \right] = \frac{9gm}{4} \sin\phi \left(\cos\phi - 2/3 \right) \,. \tag{57}$$

[1P] Die Leiter löst sich bei $F_x = 0$, also

$$\cos\phi_{\text{krit}} = \frac{2}{3} \,, \tag{58}$$

[1P] oder mit der angegebenen Formelsammlung

$$\phi_{\text{krit}} = 48.2^\circ \,. \tag{59}$$

4.7 Lösung (g), 2P

Die Winkelgeschwindigkeit beim Ablösen $\dot{\phi}_{\mathrm{krit}}$ ist mit (52)

$$\dot{\phi}_{\mathrm{krit}} = \frac{1}{T}\sqrt{1-\cos\phi_{\mathrm{krit}}} = \frac{1}{\sqrt{3}T} = \sqrt{\frac{g}{2l}}\,. \tag{60}$$

[2P]

4.8 Lösung (h), 2P

Für $\phi \geq \phi_{\mathrm{krit}}$ bewegt sich der Schwerpunkt gleichförmig in x-Richtung da es keine Zwangskraft gibt: $m\ddot{x} = 0$. [1P] Also

$$x(t) = \dot{x}_{\mathrm{krit}} t + x_{\mathrm{krit}}\,, \tag{61}$$

mit ($\sin\phi_{\mathrm{krit}} = \sqrt{5}/3$ laut Formelsammlung)

$$x_{\mathrm{krit}} = l\sin\phi_{\mathrm{krit}} = l\sqrt{5}/3\,, \qquad \dot{x}_{\mathrm{krit}} = l\cos\phi_{\mathrm{krit}}\dot{\phi}_{\mathrm{krit}} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{gl}{2}} = \frac{2}{3}\frac{l}{\sqrt{3}T}\,. \tag{62}$$

[1P]

5 Lösungen Aufgabe 5

5.1 Lösung (a), 3P

Wir haben als Funktion der generalisierten Koordinate x

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ (x_0 - x)\tan\phi \end{pmatrix}\,, \qquad \dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ 0 \\ -\dot{x}\tan\phi \end{pmatrix}\,, \tag{63}$$

also die kinetische Energie

$$T = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 = \frac{m}{2}\dot{x}^2\left(1 + \tan^2\phi\right)\,. \tag{64}$$

[1P] Mit der potentiellen Energie

$$V = mgz = -mg(x - x_0)\tan\phi\,, \tag{65}$$

[1P] ist schließlich die Lagrangefunktion

$$L(x, \dot{x}) = \frac{m}{2}\dot{x}^2\left(1 + \tan^2\phi\right) + mg(x - x_0)\tan\phi\,. \tag{66}$$

[1P]

5.2 Lösung (b), 3P

Wir haben

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\tan\phi \end{pmatrix}\,, \qquad \vec{F}_R = -\alpha\begin{pmatrix} \dot{x} \\ 0 \\ -\dot{x}\tan\phi \end{pmatrix}\,, \tag{67}$$

[1P] also für die generalisierte Reibungskraft

$$Q = -\alpha\dot{x}\left(1 + \tan^2\phi\right)\,. \tag{68}$$

[2P]

5.3 Lösung (c), 7P

Mit

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{x}} = m\dot{x}\left(1 + \tan^2\phi\right)\,, \qquad \frac{\partial L}{\partial x} = mg\tan\phi\,, \tag{69}$$

lautet die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x}\left(1 + \tan^2\phi\right) - mg\tan\phi = -\alpha\dot{x}\left(1 + \tan^2\phi\right)\,, \tag{70}$$

[2P] oder

$$\ddot{x} = \frac{g\tan\phi}{1 + \tan^2\phi} - \frac{\alpha}{m}\dot{x}\,. \tag{71}$$

Die Lösung erhalten wir wenn wir die allg. Lösung der homogenen Gleichugn zur speziellen Lösung der inhomogenen addieren (volle Punkte gibt es auch wenn die Lösung in Gleichung (76) direkt hingeschrieben wird oder die Bewegungsgleichung 2x integriert wird). Die allg. Lösung der homogenen Gleichung

$$\ddot{x} = -\frac{\alpha}{m}\dot{x}\,. \tag{72}$$

[1P] lautet

$$x_{\text{hom}}(t) = Ae^{-\alpha/mt} + B\,, \tag{73}$$

[1P] eine spezielle Lösung der inhomogenen ist

$$x_{\text{inh}} = \frac{mg\tan\phi}{\alpha(1+\tan^2\phi)}t\,. \tag{74}$$

[1P] Die Randbedingungen fixieren

$$B = -A = -\frac{g\tan\phi}{1+\tan^2\phi}\frac{m^2}{\alpha^2}\,, \tag{75}$$

also insgesamt

$$x(t) = \frac{g\tan\phi}{1+\tan^2\phi}\frac{m^2}{\alpha^2}\left[e^{-\alpha t/m} - 1 + \frac{\alpha}{m}t\right]\,. \tag{76}$$

[2P]

5.4 Lösung (d), 5P

Für kleine α ist

$$e^{-\alpha t/m} - 1 + \frac{\alpha}{m}t \to \frac{\alpha^2}{2m^2}t^2 + \mathcal{O}(\alpha^3)\,, \tag{77}$$

[2P] also in diesem Fall

$$x(t) \to \frac{g\tan\phi}{1+\tan^2\phi}\frac{t^2}{2}\,, \tag{78}$$

[3P] was in der Tat die Lösung der Bewegungsgleichung (17) mit $\alpha = 0$ ist.

5.5 Lösung (e), 2P

Für große α ist

$$e^{-\alpha t/m} - 1 + \frac{\alpha}{m}t \to \frac{\alpha}{m}t\,, \tag{79}$$

[1P] also in diesem Fall

$$x(t) \to \frac{g\tan\phi}{1+\tan^2\phi}\frac{m}{\alpha}t\,. \tag{80}$$

[1P] Punkte gibts auch wenn der -1 Term mitgenommen wurde