Karlsruhe Institute of Technology

Institut für Theoretische Teilchenphysik
Prof. Dr. U. Nierste, Dr. R. Ziegler, Simon Kast
https://www.ttp.kit.edu/courses/ss2017/theob/start

Klassische Theoretische Physik II

Übungsblatt 11

Sommersemester 2017

Abgabe: 6.7.2017
Besprechung: 11.7.2017

Aufgabe 21: Hauptachsen (10 Punkte)

In einem kartesischem Koordinatensystem KS mit Achsen $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ sei durch die drei Massenpunkte mit Massen m_i und Ortsvektoren $\vec{r}_i$

$$
\begin{aligned}
m_1 &= m\,, &\qquad \vec{r}_1 &= -a\,\vec{e}_1 + 3a\,\vec{e}_2\,,\\
m_2 &= 2m\,, &\qquad \vec{r}_2 &= a\,\vec{e}_1 - a\,\vec{e}_2\,,\\
m_3 &= m\,, &\qquad \vec{r}_3 &= -a\,\vec{e}_1 - a\,\vec{e}_2\,,
\end{aligned}
$$

ein starrer Körper gegeben.

(a) Bestimmen Sie den Trägheitstensor Θ_{kl}, der für N Massenpunkte definiert ist durch

$$\Theta_{kl} = \sum_{n=1}^{N} m_{(n)} \left(\vec{r}^{\,2}_{(n)} \delta_{kl} - x_{(n)k} x_{(n)l} \right) .$$

(4 Punkte)

(b) Durch Transformation in ein rotiertes Koordinatessystem KS′

$$\Theta' = R^T \Theta R\,, \tag{1}$$

kann man Θ diagonalisieren:

$$\Theta' = \mathrm{diag}(\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3)\,.$$

Die Eigenwerte $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ heißen *Hauptträgheitsmomente*. Bestimmen Sie die Hauptträgheitsmomente für den Trägheitstensor Θ aus Aufgabe **a)**.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst dass die Eigenwerte $m_{1,2}$ einer symmetrischen, reellen 2×2 Matrix M

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} ,$$

gegeben sind durch $m_{1,2} = \frac{a+c}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a+c}{2}\right)^2 - (ac - b^2)}$, indem Sie die Invarianz von Spur und Determinante benutzen.

(3 Punkte)

(c) Bestimmen Sie die *Hauptachsentransformation*, also die Drehmatrix R, die Θ gemäß Gleichung (1) diagonalisiert.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst dass die obige 2×2 Matrix M diagonalisert wird durch eine Rotation R

$$R = \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} ,$$

mit $\tan 2\beta = \frac{2b}{c-a}$, indem Sie explizit $R^T M R$ berechnen.

(3 Punkte)

Aufgabe 22: Rotierender Quader (10 Punkte)

Gegeben sei ein Quader konstanter Massendichte ρ_0 mit Kantenlängen a, b, c, in dessen Schwerpunkt wir ein kartesisches Koordinatensystem mit Achsen $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ setzen, die jeweils parallel zu den Kanten ausgerichtet sind.

(a) Bestimmen Sie den Trägheitstensor Θ_{kl} bezüglich dieses Koordinatensystems. Für einen Körper mit Massendichte $\rho(\vec{r})$ und Volumen V ist der Trägheitstensor definiert durch das Volumenintegral

$$\Theta_{kl} = \int_V d^3r\, \rho(\vec{r}) \left(\vec{r}^{\,2}\delta_{kl} - x_k x_l\right) , \qquad \vec{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} .$$

(4 Punkte)

(b) Bestimmen Sie die Rotationsenergie $T = \frac{1}{2}\,\vec{\omega}^T\Theta\vec{\omega}$ der Drehung um eine Achse $\vec{\omega}$, die durch die Raumdiagonale verläuft.

(3 Punkte)

(c) Bestimmen Sie die Rotationsenergie der Drehung um eine Achse $\vec{\omega}'$, die durch den Schwerpunkt und in der $x_1 - x_3$ Ebene diagonal durch die Kanten verläuft.

(3 Punkte)