

# Klassische Theoretische Physik II

## Übungsblatt 4 Sommersemester 2017

Vorbereitung der  
Präsenzübung  
am 23.5.2017

### Aufgabe 7: Massenpunkt in verschiedenen Potentialen

Bestimmen Sie die Lagrangefunktionen und die Euler-Lagrange-Gleichungen zu den folgenden mechanischen Systemen:

- (a) Ein Massenpunkt  $m$  bewegt sich in der  $(x, y)$ -Ebene im Potenzial  $V(x, y)$  bzw.  $V(r, \phi)$ . Betrachten Sie das Problem in kartesischen Koordinaten und ebenen Polarkoordinaten.
- (b) Ein Teilchen der Masse  $m$  bewegt sich in der  $(x, y)$ -Ebene im Potenzial  $V(x, y) = k(x^2 + y^2)$  mit  $k > 0$  (harmonischer Oszillator in zwei Dimensionen). Lösen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen in kartesischen Koordinaten mit allgemeinen Anfangsbedingungen und diskutieren Sie die möglichen Bahnformen.

*Hinweis:* Schreiben Sie die Lösungen in Matrix-Schreibweise

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{pmatrix},$$

mit einer  $2 \times 2$  Matrix  $M$ . Dann können Sie die sogenannte *Singulärwertzerlegung* benutzen, die besagt, dass eine beliebige reelle Matrix  $M$  geschrieben werden kann als

$$M = O_L \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} O_R^T,$$

wobei  $O_L$  und  $O_R$  orthogonale  $2 \times 2$  Drehmatrizen sind ( $O_R^T = O_R^{-1}$  bezeichnet hier das Transponierte von  $O_R$ ):

$$O_L = \begin{pmatrix} \cos \alpha_L & \sin \alpha_L \\ -\sin \alpha_L & \cos \alpha_L \end{pmatrix}, \quad O_R = \begin{pmatrix} \cos \alpha_R & \sin \alpha_R \\ -\sin \alpha_R & \cos \alpha_R \end{pmatrix}.$$

Die 4 Parameter  $A, B, \alpha_L, \alpha_R$  können aus den 4 Einträgen der Matrix  $M$  bestimmt werden, aber dies ist hier nicht nötig. Berechnen Sie die Wirkung von  $O_R^T$  auf den Vektor  $(\cos \omega t, \sin \omega t)^T$  und vereinfachen Sie mit Hilfe der trigonometrischen Additionstheoreme. Sie können nun die Bahnform im gedrehten Koordinatensystem  $(x', y')$  bestimmen, das definiert ist durch

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = O_L^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

- (c) Ein Teilchen der Masse  $m$  gleitet reibungsfrei unter dem Einfluss der Schwerkraft  $-mg\vec{e}_z$  auf der Innenfläche eines Kegels mit dem halben Öffnungswinkel  $\alpha$ , dessen Symmetriachse die  $z$ -Achse ist. Benutzen Sie als verallgemeinerte Koordinaten die Zylinderkoordinaten  $z$  und  $\varphi$ .

### Aufgabe 8: Bewegung im Schwerfeld

Die Bewegung eines Massenpunkts mit Masse  $m$  im Schwerfeld  $V(y) = mgy$  sei auf die Bahn  $y = cx^2/2$  eingeschränkt ( $c \neq 0$ ).

- (a) Berechnen Sie aus der Zwangsbedingung die Größen  $\dot{y}(t)$  und  $\ddot{y}(t)$ , ausgedrückt durch  $x, \dot{x}, \ddot{x}$ .
- (b) Stellen Sie die Lagrangefunktion des Systems auf. Wählen Sie dabei  $x$  als verallgemeinerte Koordinate.
- (c) Bestimmen Sie aus der Lagrangefunktion die Bewegungsgleichung für  $x(t)$ .

