Karlsruhe Institute of Technology

Institut für Theoretische Teilchenphysik
Prof. Dr. U. Nierste, Dr. R. Ziegler, Simon Kast
https://www.ttp.kit.edu/courses/ss2017/theob/start

Klassische Theoretische Physik II

Übungsblatt 4

Sommersemester 2017

Vorbereitung der Präsenzübung am 23.5.2017

Aufgabe 7: Massenpunkt in verschiedenen Potentialen

Bestimmen Sie die Lagrangefunktionen und die Euler-Lagrange-Gleichungen zu den folgenden mechanischen Systemen:

(a) Ein Massenpunkt m bewegt sich in der (x, y)-Ebene im Potenzial $V(x, y)$ bzw. $V(r, \phi)$. Betrachten Sie das Problem in kartesischen Koordinaten und ebenen Polarkoordinaten.

(b) Ein Teilchen der Masse m bewegt sich in der (x, y)-Ebene im Potenzial $V(x, y) = k(x^2 + y^2)$ mit $k > 0$ (harmonischer Oszillator in zwei Dimensionen). Lösen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen in kartesischen Koordinaten mit allgemeinen Anfangsbedingungen und diskutieren Sie die möglichen Bahnformen.

Hinweis: Schreiben Sie die Lösungen in Matrix-Schreibweise

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \cos\omega t \\ \sin\omega t \end{pmatrix},$$

mit einer 2×2 Matrix M. Dann können Sie die sogenannte *Singulärwertzerlegung* benutzen, die besagt, dass eine beliebige reelle Matrix M geschrieben werden kann als

$$M = O_L \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} O_R^T,$$

wobei O_L und O_R orthogonale 2×2 Drehmatrizen sind ($O_R^T = O_R^{-1}$ bezeichnet hier das Transponierte von O_R):

$$O_L = \begin{pmatrix} \cos\alpha_L & \sin\alpha_L \\ -\sin\alpha_L & \cos\alpha_L \end{pmatrix}, \qquad O_R = \begin{pmatrix} \cos\alpha_R & \sin\alpha_R \\ -\sin\alpha_R & \cos\alpha_R \end{pmatrix}.$$

Die 4 Parameter A, B, α_L, α_R können aus den 4 Einträgen der Matrix M bestimmt werden, aber dies ist hier nicht nötig. Berechnen Sie die Wirkung von O_R^T auf den Vektor $(\cos\omega t, \sin\omega t)^T$ und vereinfachen Sie mit Hilfe der trigonometrischen Additionstheoreme. Sie können nun die Bahnform im gedrehten Koordinatensystem (x', y') bestimmen, das definiert ist durch

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = O_L^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

(c) Ein Teilchen der Masse m gleitet reibungsfrei unter dem Einfluss der Schwerkraft $-mg\vec{e}_z$ auf der Innenfläche eines Kegels mit dem halben Öffnungswinkel α, dessen Symmetriachse die z-Achse ist. Benutzen Sie als verallgemeinerte Koordinaten die Zylinderkoordinaten z und φ.

Aufgabe 8: Bewegung im Schwerefeld

Die Bewegung eines Massenpunkts mit Masse m im Schwerefeld $V(y) = mgy$ sei auf die Bahn $y = cx^2/2$ eingeschränkt ($c \neq 0$).

(a) Berechnen Sie aus der Zwangsbedingung die Größen $\dot{y}(t)$ und $\ddot{y}(t)$, ausgedrückt durch $x, \dot{x}, \ddot{x}$.

(b) Stellen Sie die Lagrangefunktion des Systems auf. Wählen Sie dabei x als verallgemeinerte Koordinate.

(c) Bestimmen Sie aus der Lagrangefunktion die Bewegungsgleichung für $x(t)$.