Institut für Theoretische Teilchenphysik
Prof. Dr. U. Nierste, Dr. R. Ziegler, Simon Kast
https://www.ttp.kit.edu/courses/ss2017/theob/start

Klassische Theoretische Physik II

Übungsblatt 1

Sommersemester 2017

Vorbereitung der Präsenzübung am 2.5.2017

Aufgabe 1: Schwerefeld der Erde
Ein Ball mit Masse m wird im Schwerefeld der Erde schräg in die Luft geworfen, die Luftreibung und die Scheinkräfte aus der Erdrotation seien vernachlässigbar. Die Geschwindigkeit beim Abwurf zum Zeitpunkt $t = 0$ bei $\vec{r} = 0$ sei $\vec{v}_0 = v_0 \cos\alpha\, \vec{e}_y + v_0 \sin\alpha\, \vec{e}_z$ mit $v_0 > 0$ und $0 < \alpha < \pi/2$. Die Gewichtskraft ist $\vec{F} = -mg\vec{e}_z$.

a) Berechnen Sie die Bahnkurve (Wurfparabel) $\vec{r}(t)$. Zu welchem Zeitpunkt prallt der Ball auf dem Boden (bei $z = 0$) auf?

b) Berechnen Sie den Drehimpuls $\vec{L} = m\vec{r} \times \dot{\vec{r}}$ und das Betragsquadrat $\vec{L}^2$ als Funktion von t.

Aufgabe 2: Zentralkräfte und Erhaltungssätze
Zwischen N Massenpunkten mit Ortsvektoren $\vec{r}_k$ und m_k, $k = 1, \ldots N$, wirken Zentralkräfte; d.h. die vom Massenpunkt bei $\vec{r}_k$ auf den Massenpunkt bei $\vec{r}_j$ ausgeübte Kraft sei

$$\vec{F}_{jk}(\vec{r}_k - \vec{r}_j) = F_{jk}\left(|\vec{r}_k - \vec{r}_j|\right) \frac{\vec{r}_j - \vec{r}_k}{|\vec{r}_k - \vec{r}_j|} \qquad \text{mit} \quad F_{jk} = F_{kj} \quad \text{(3. Newton'sches Gesetz).}$$

F_{jk} ist zeitunabhängig, und es wirken keine weiteren Kräfte auf die Massenpunkte (das System ist abgeschlossen).

a) Berechnen Sie das Gesamtdrehmoment

$$\vec{M} = \sum_{j=1}^{N} \vec{M}_j, \qquad \text{wobei} \quad \vec{M}_j = \sum_{k=1, k\neq j}^{N} \vec{r}_j \times \vec{F}_{jk}.$$

Was ist die physikalische Bedeutung von $\vec{M}_j$?

Hinweis: Teilen Sie die Summe über j, k in zwei Anteile mit $j < k$ und $j > k$ auf.
Wie kann man die beiden Anteile zusammenfassen?

b) Welche der folgenden Größen sind immer (d.h. für beliebiges F_{jk}) zeitlich konstant, also *Erhaltungsgrößen*?

(i) Gesamtimpuls $\vec{P} = \sum_{k=1}^{N} m_k \dot{\vec{r}}_k$,

(ii) Gesamtenergie,

(iii) Gesamtdrehimpuls $\vec{L} = \sum_{k=1}^{N} m_k\ \vec{r}_k \times \dot{\vec{r}}_k$,

(iv) $\sum_{k=1}^{N} m_k \vec{r}_k/M - \vec{P}t/M$ mit der Gesamtmasse $M = \sum_{k=1}^{N} m_k$.

Sie müssen Ihre Antworten nicht beweisen.

Literatur: F. Scheck, *Mechanik*, Springer.

Aufgabe 3: Bewegung mit Stokes- und Newton-Reibung

Wir betrachten ein Fahrzeug mit Masse m, das sich zum Zeitpunkt $t = 0$ mit der Geschwindigkeit v_0 bewegt, und für $t \geq 0$ durch die Luftreibung gebremst wird. Die Geschwindigkeit $v(t)$ erfüllt die Differentialgleichung

$$\dot{v} = -\alpha v - \beta v^2, \qquad \alpha, \beta \geq 0. \tag{1}$$

$m\alpha v$ und $m\beta v^2$ sind die Beträge der *Stokes'schen* und der *Newton'schen* Reibungskraft.

a) Berechnen Sie die Partialbruchzerlegung von $\dfrac{1}{\alpha v + \beta v^2}$ für $\alpha \neq 0$.

b) Bestimmen Sie $v(t)$. Achten Sie beim Integrieren darauf, dass das Argument des Logarithmus' dimensionslos ist. Drücken Sie die Integrationskonstante durch v_0 aus.

Zeichnen Sie $v(t)$ für $0 \leq t \leq 20\,\mathrm{s}$ für den Fall $v_0 = 36\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, $\alpha = 2{,}5 \cdot 10^{-2}\mathrm{s}^{-1}$, $\beta = 4 \cdot 10^{-3}\mathrm{m}^{-1}$. Tragen Sie in dieselbe Zeichnung die Lösungen für die Fälle ein dass $\alpha = 0$ bzw. $\beta = 0$ gesetzt wird.

Hinweis: Betrachten Sie die Fälle $\alpha = 0$ und $\alpha \neq 0$ getrennt.

c) Bestimmen Sie $x(t)$ mit der Anfangsbedingung $x(0) = x_0$.

Zeichnen Sie den Weg $x_{\mathrm{roll}} = x(\infty) - x_0$, den das Fahrzeug beim Ausrollen zurücklegt, als Funktion von α für $0 < \alpha \leq 2{,}5 \cdot 10^{-2}\mathrm{s}^{-1}$ für die in b) angegebenen Werte von v_0 und β.

Hinweis: Substituieren Sie $z = e^{-\alpha t}$, um das Integral über $v(t)$ zu lösen.