Vorlesung vom 10. II. 2015

Mit (238) wird (237) zu:

$$\vartheta(r) = \vartheta_0 \pm |\ell| \int_{r_0}^{r} \frac{dr'}{r'^2 \sqrt{2\mu\left(E - \frac{\ell^2}{2\mu r'^2} + \frac{\alpha}{r'}\right)}}$$

Mit $u(r) = 1/r$; $u_0 = \frac{1}{r_0}$:

$$dr' = -\frac{1}{u^2}\, du \, :$$

$$\vartheta = \vartheta_0 \mp |\ell| \int_{u_0}^{u} \frac{du'}{\sqrt{2\mu E - \ell^2 u'^2 + 2\mu\alpha u'}} \qquad (240)$$

9.II ↑
10.II

Quadratische Ergänzung:

$$2\mu E - \ell^2 u'^2 + 2\mu\alpha u'$$
$$= -\ell^2 (u' - \bar{u})^2 + \ell^2 B$$

mit
$$\left.\begin{aligned} \bar{u} &= \frac{\mu\alpha}{\ell^2} \\ B &= \frac{\mu\alpha}{\ell^2} \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{\mu\alpha^2}} \end{aligned}\right\} \qquad (241)$$

und $v = u' - \bar{u}$ wird (240) zu

$$\vartheta = \vartheta_0 \mp \int_{u_0-\bar{u}}^{u-\bar{u}} \frac{dv}{\sqrt{B^2 - v^2}}$$

$$= \vartheta_0 \pm \left[\arccos \frac{u-\bar{u}}{B} - \arccos \frac{u_0 - \bar{u}}{B} \right] \qquad (242)$$

Wir wählen nun r_0 so, dass

$$\arccos \frac{u_0-\bar{u}}{B} = 0$$

ist, also $u_0 = \bar{u} + B$.

$$\Rightarrow \quad \frac{u-\bar{u}}{B} = \cos(\vartheta - \vartheta_0)$$

löst (242) für beide Vorzeichen.

$$\Rightarrow \quad u = \frac{1}{r} = \bar{u} + B \cos(\vartheta - \vartheta_0)$$

$$\overset{(241)}{=} \frac{\mu\alpha}{l^2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu\alpha^2}} \cos(\vartheta - \vartheta_0) \right]$$

oder

$$r = \frac{1}{C\,(1 + \varepsilon \cos(\vartheta - \vartheta_0))} \qquad (243)$$

mit

$$\left.\begin{aligned} C &= \frac{\mu\alpha}{l^2} \\ \text{und} \quad \varepsilon &= \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu\alpha^2}} \end{aligned}\right\} \quad (244)$$

ε heißt <u>Exzentrizität</u>.

(243) ist die Gleichung eines <u>Kegelschnitts</u>

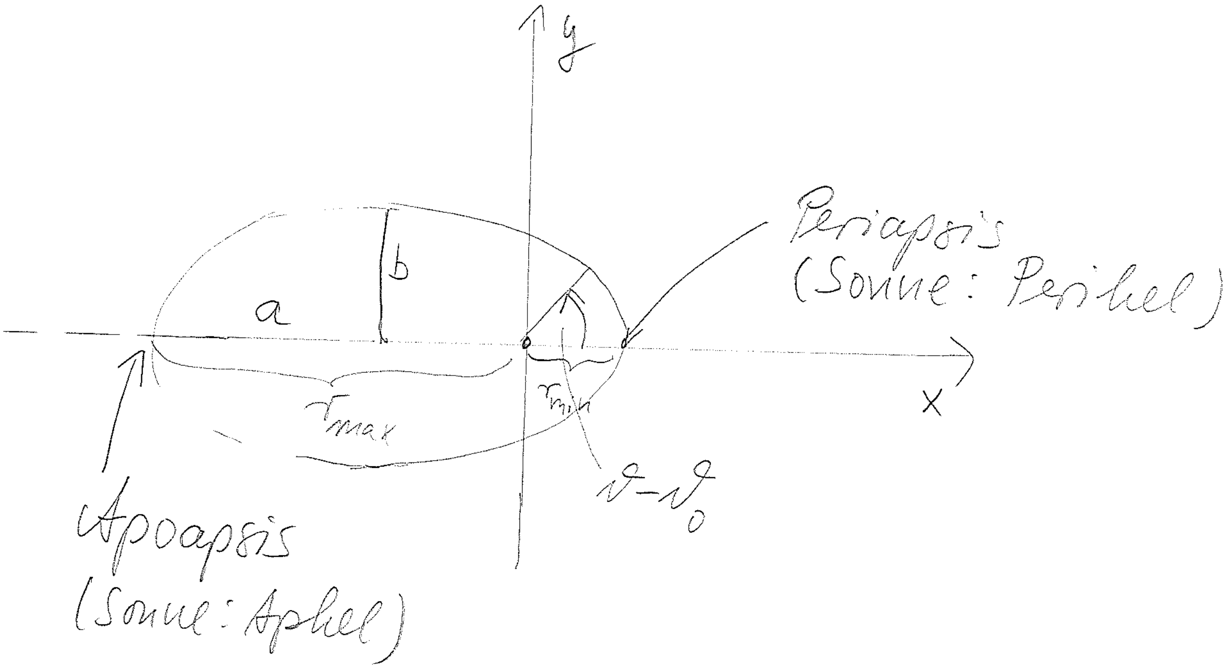
$$\left.\begin{array}{llll} E > 0 & \Rightarrow & \varepsilon > 1 & \text{Hyperbel} \\ E = 0 & \Rightarrow & \varepsilon = 1 & \text{Parabel} \\ E < 0 & \Rightarrow & \varepsilon < 1 & \text{Ellipse} \\ \text{speziell:} & & & \\ E = -\frac{\mu\alpha^2}{2l^2} & \Rightarrow & \varepsilon = 0 & \text{Kreis} \end{array}\right\} \quad (245)$$

Aus (243) finden wir

$$r(\vartheta_0) = r_{min} = \frac{1}{C(1+\varepsilon)} \quad (246)$$

Für $\varepsilon < 1$ ist

$$r(\vartheta_0 + \pi) = r_{max} = \frac{1}{C(1-\varepsilon)} \quad (247)$$



Große Halbachse

$$a = \frac{r_{min} + r_{max}}{2}$$

$$\overset{246, 247}{=} \frac{1}{2C(1+\varepsilon)} + \frac{1}{2C(1-\varepsilon)} = \frac{1}{C}\,\frac{1}{1-\varepsilon^2} \qquad (248)$$

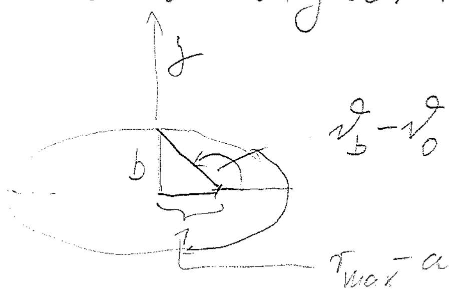
$$a \overset{244}{=} -\frac{\alpha}{2E} \qquad (249)$$

hängt nicht von l ab!

Der Fall $\varepsilon < 1$ in (243) entspricht dem
1. Keplerschen Gesetz:

„Die Planeten durchlaufen Ellipsenbahnen, in deren Brennpunkt die Sonne steht."

Berechnung der kleinen Halbachse b



Bei $\vartheta = \vartheta_b$ sei $y = b$.

Extremum von $y = r \sin(\vartheta - \vartheta_0) \overset{(243)}{=} \dfrac{\sin(\vartheta - \vartheta_0)}{C[1 + \varepsilon \cos(\vartheta - \vartheta_0)]}$

$$0 = \frac{dy}{d\vartheta} = \frac{\varepsilon + \cos(\vartheta - \vartheta_0)}{C[1 + \varepsilon \cos(\vartheta - \vartheta_0)]^2} \quad \text{für } \vartheta = \vartheta_b$$

[Quotientenregel]

$$\Rightarrow \quad \cos(\vartheta_b - \vartheta_0) = -\varepsilon \qquad (250)$$

Und $r_b := r(\vartheta_b) \overset{(243)}{=} \dfrac{1}{C(1-\varepsilon^2)} \overset{(248)}{=} a$ $\qquad (251)$

Pythagoras: $b^2 = r_b^2 - (r_{max} - a)^2$

$$= a^2 - (r_{max} - a)^2$$

$$= 2 a r_{max} - r_{max}^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{b^2}{a^2} = 2 \frac{r_{max}}{a} - \frac{r_{max}^2}{a^2} \qquad (252)$$

Mit $\dfrac{r_{max}}{a} \overset{(247),(248)}{=} \dfrac{1-\varepsilon^2}{1-\varepsilon} = 1 + \varepsilon$

und (252) finden wir

$$\frac{b}{a} = \sqrt{2(1+\epsilon) - (1+\epsilon)^2} = \sqrt{1-\varepsilon^2}\,, \qquad (253)$$

was die geometrische Bedeutung der Exzentrizität ε verdeutlicht.

Fläche der Ellipse:

$$A = \pi a b = \pi a^2 \sqrt{1-\varepsilon^2}$$

$$\overset{(248)}{=} \pi a^2 \frac{1}{\sqrt{Ca}} \overset{(244)}{=} \pi \cdot |\ell| \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu\alpha}} \qquad (254)$$

Andererseits gilt für die Umlaufzeit τ:

$$A = \int_0^\tau \left|\frac{dA}{dt}\right| dt \overset{(225)}{=} \frac{|\ell|}{2\mu} \cdot \tau \qquad (255)$$

(254) und (255):

$$\tau = \frac{2\mu A}{|\ell|} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\mu}{\alpha}}\; a^{3/2} \qquad (256)$$

Für $m_1 \gg m_2$ (Sonnenmasse $\gg$ Planetenmasse) ist $\mu \approx m_2$. Mit $\alpha \overset{(239)}{=} G_N \cdot m_1 m_2$ ist

also

8.II.15
-122-
Kern.1

$$\tau \stackrel{256}{\approx} \frac{2\pi}{\sqrt{G_N m_1}}\, a^{3/2} \qquad (257)$$

unabhängig von m_2!

Dies ist das <u>3. Keplersche Gesetz</u>:

„Das Quadrat der Periode τ ist der dritten Potenz der Hauptachse a proportional."

Dies gilt wegen $\mu \neq m_2$ nur näherungsweise:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = m_2 \frac{1}{1 + \frac{m_2}{m_1}}$$

$\Rightarrow$ Korrekturfaktor zu (257):

$$\tau = \frac{2\pi}{\sqrt{G_N m_1}}\, a^{3/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{m_2}{m_1}}} \qquad (258)$$

Für den schwersten Planeten, Jupiter, ist $\frac{m_2}{m_1} \approx 10^{-3}$ und die Korrektur ist 0,5 ‰.