Lösungen zur Probeklausur

Aufgabe 1

a) Zyklische Variablen sind Variablen, die nicht in der Lagrangefunktion vorkommen. Nur ihre Ableitungen treten auf. Damit folgt aufgrund der Euler-Lagrange-Gleichung 1 P

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}}L - \frac{\partial}{\partial q}L = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}}L = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p\,.$$

Damit ist der generalisierte Impuls $p = \frac{\partial}{\partial \dot{q}}L$ erhalten. 1 P

b) Die gesuchte Größe ist 1 P

$$Z(q,\dot{q},t) = L(q,\dot{q},t) - \dot{q}\frac{\partial}{\partial \dot{q}}L(q,\dot{q},t)\,.$$

Beweis: 1 P

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Z(q,\dot{q},t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(L(q,\dot{q},t) - \dot{q}\frac{\partial}{\partial \dot{q}}L(q,\dot{q},t)\right)\\
&= \dot{q}\frac{\partial}{\partial q}L(q,\dot{q},t) + \ddot{q}\frac{\partial}{\partial \dot{q}}L(q,\dot{q},t) - \ddot{q}\frac{\partial}{\partial \dot{q}}L(q,\dot{q},t) - \dot{q}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}}L(q,\dot{q},t) = (\text{mit E-L-G })\\
&= \dot{q}\frac{\partial}{\partial q}L(q,\dot{q},t) - \dot{q}\frac{\partial}{\partial q}L(q,\dot{q},t) = 0
\end{aligned}$$

c) Betrachte Variation des Wirkungsfunktionals $S[q(t)] = \int_{t_0}^{t_1} L(q(t'),\dot{q}(t'),t')\mathrm{d}t'$.
Prinzip der kleinsten Wirkung: $\delta S = 0$.
Variation der Bahnkurve $q(t) \to q(t) + \epsilon\delta(t)$, $\delta(t_0) = \delta(t_1) = 0$ 2 P

$$\begin{aligned}
\delta S &= S[q(t)+\epsilon\delta(t)] - S[q(t)]\\
&= \int_{t_0}^{t_1} L(q(t')+\epsilon\delta(t'),\dot{q}(t')+\epsilon\dot{\delta}(t'),t')\mathrm{d}t' - \int_{t_0}^{t_1} L(q(t'),\dot{q}(t'),t')\mathrm{d}t'\\
&= \int_{t_0}^{t_1}\left[L(q(t'),\dot{q}(t'),t') + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}L(q(t')+\epsilon\delta(t'),\dot{q}(t')+\epsilon\dot{\delta}(t'),t')|_{\epsilon=0}\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2)\right]\mathrm{d}t'\\
&\quad - \int_{t_0}^{t_1} L(q(t'),\dot{q}(t'),t')\mathrm{d}t'\\
&= \epsilon\int_{t_0}^{t_1}\left[\delta(t')\frac{\partial}{\partial q(t')}L(q(t'),\dot{q}(t'),t') + \dot{\delta}(t')\frac{\partial}{\partial \dot{q}(t')}L(q(t'),\dot{q}(t'),t')\right]\mathrm{d}t'\\
&= \epsilon\int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{\partial}{\partial q(t')}L(q(t'),\dot{q}(t'),t') - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}(t')}L(q(t'),\dot{q}(t'),t')\right]\delta(t')\mathrm{d}t'\\
&\quad + \epsilon\left[\delta(t')\frac{\partial}{\partial \dot{q}(t')}L(q(t'),\dot{q}(t'),t')\right]_{t_0}^{t_1}
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde partiell integriert. Der letzte Term verschwindet da die Endpunkte der Bahn fest liegen und nicht variiert werden. Da die Variation $\delta(t)$ beliebig ist, muss der Term in eckigen Klammern unter dem Integral verschwinden. Dies entspricht der Euler-Lagrange-Gleichung.

d) Offensichtliche Symmetrietransformation ist eine Rotation um die x_3-Achse und die Zeittranslation. 1 P

- Die infinitesimale Variablentransformation ist

$$x_1 \to x_1^* = x_1 - \epsilon x_2 \,, \quad x_2 \to x_2^* = x_2 + \epsilon x_1$$

  Das Noether-Theorem hat hier die Form 1 P

$$J = x_1 \frac{\partial}{\partial \dot{x}_2} L - x_2 \frac{\partial}{\partial \dot{x}_1} L = 2(x_1 \dot{x}_2 - x_2 \dot{x}_1) \frac{\partial}{\partial p_{12}} L(q, p_{12}, p_3) \,,$$

  mit $p_{12} = \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2$ und $p_3 = \dot{x}_3$.

- Die infinitesimale Variablentransformation ist

$$t \to t^* = t + \epsilon\phi$$

  Das Noether-Theorem hat hier die Form 1 P

$$Q = \left(L - \dot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \phi$$

  mit

$$\frac{d}{dt} Q = 0 \,.$$

e) Das Potential ist homogen vom Grade $k = -1$. 1 P
Somit gilt nach dem Virialsatz 1 P

$$\frac{\bar{T}}{\bar{U}} = \frac{k}{2} = -\frac{1}{2} \,.$$

1 P

Aufgabe 2

a) Position des Pendels 0,5 P

$$\vec{x} \equiv \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

Ableitung der Position ergibt Geschwindigkeit des Pendels 0,5 P

$$\dot{\vec{x}} = \dot{r} \begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} + r\dot{\theta} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix}$$

Kinetische Energie 1 P

$$T = \frac{M}{2} \left|\dot{\vec{x}}\right|^2 = \frac{M}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$$

Potentielle Energie 1 P

$$V = -Mgr\cos\theta + \frac{D}{2}(R-r)^2$$

Lagrangefunktion

$$L = T - V = \frac{M}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + Mgr\cos\theta - \frac{D}{2}(R-r)^2$$

b) Euler-Lagrange-Bewegungsgleichungen: 2 P

$$g\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0 \tag{1}$$

$$Mr\dot{\theta}^2 + Mg\cos\theta + D(R-r) - M\ddot{r} = 0 \tag{2}$$

c) mögliche Gleichgewichtslagen ($\ddot{\theta} = \dot{\theta} = 0$, $\ddot{r} = \dot{r} = 0$) 2 P

$$\theta_0 = 0\,, \quad r_0 = R + \frac{Mg\cos\theta}{D}|_{\theta=\theta_0=0} = R + \frac{Mg}{D}$$

d) Entwickle die E-L-Gl.: $r = r_0 + q$, $\theta \ll 1$ 2 P

$$\ddot{q} + \frac{D}{M}q = 0, \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{r_0}\theta = 0$$

Harmische Oszillation in beiden Koordinaten θ und q 1 P

$$q(t) = A_q\cos(\omega_q t + \delta_q)\,, \quad \theta(t) = A_\theta\cos(\omega_\theta t + \delta_\theta)$$

mit Frequenz

$$\omega_\theta^2 = \frac{g}{r_0}, \quad \omega_q^2 = \frac{D}{M}$$

Aufgabe 3

Extremum des Funktionals (Fläche) 0,5 P

$$A = \int y(x)dx$$

unter der Nebenbedingung 0,5 P

$$L = \int \sqrt{1 + y'(x)^2}dx$$

Zu Minimieren ist also : 1 P

$$F(y, y') \equiv y + \lambda\sqrt{1 + y'^2}, \quad \text{wobei} \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

Aus E-L folgt 1 P

$$F - \frac{\partial F}{\partial y'}y' \equiv \alpha = \text{const}$$

$$\alpha = y + \lambda\sqrt{1 + y'^2} - \lambda\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}y'$$

1 P

$$\Rightarrow \lambda = \sqrt{1 + y'^2}(\alpha - y) \quad \Rightarrow \quad y' = \pm\sqrt{\frac{\lambda^2 - (\alpha - y)^2}{(\alpha - y)^2}}$$

Integrieren führt auf 1 P

$$\int_{\hat{x}}^{x} dx = \int_{y(\hat{x})}^{y(x)} dy\frac{1}{y'} = \int_{y(\hat{x})}^{y(x)} dy\sqrt{\frac{(\alpha - y)^2}{\lambda^2 - (\alpha - y)^2}}$$

$$x - \hat{x} = \sqrt{\lambda^2 - (\alpha - y(x))^2} - \sqrt{\lambda^2 - (\alpha - y(\hat{x}))^2}$$

Auflösen der Gleichung führt auf die Kreisgleichung 1 P

$$(x - x_0)^2 + (y - \alpha)^2 = \lambda^2$$

mit

$$x_0 = \hat{x} - \sqrt{\lambda^2 - (\alpha - y(\hat{x}))^2}$$

Aufgabe 4

a) Postition der Kugel 0,5 P

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} r\cos\omega t \\ r\sin\omega t \\ ar^2 \end{pmatrix}$$

Geschwindigkeit der Kugel 0,5 P

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} \dot{r}\cos\omega t - r\omega\sin\omega t \\ \dot{r}\sin\omega t + r\omega\cos\omega t \\ 2ar\dot{r} \end{pmatrix}$$

Lagrangefunktion 2 P

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\omega^2 + 4a^2r^2\dot{r}^2) - mgar^2 \\ &= \frac{1}{2}m(1+4a^2r^2)\dot{r}^2 + \frac{m}{2}(\omega^2 - 2ga)r^2 \end{aligned}$$

b) E-L-G 1 P

$$m(1+4a^2r^2)\ddot{r} + 4ma^2r\dot{r}^2 - m(\omega^2 - 2ag)r = 0$$

Gleichgewichtslage: $\ddot{r} = \dot{r} = 0$

$$(\omega^2 - 2ag)r = 0$$

also $r = 0$. 1 P

Stabiles Gleichgewicht $\ddot{r} < 0$

$$\ddot{r} = \frac{\omega^2 - 2ag}{1 + 4a^2r^2}$$

d.h. stabiles Gleichgewicht für $2ag > \omega^2$.

Für $\omega^2 = 2ag$ ist die Kugel kräftefrei unabhängig vom Ort. 1 P

c) Lagrangefunktion zeitunabhängig also gilt: 0,5 P

$$\frac{d}{dt}\left[L - \dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right] = \frac{d}{dt}\left[(1+4a^2r^2)\dot{r}^2 + (2ag - \omega^2)r^2\right] = 0$$

Mit 0,5 P

$$C = (1+4a^2r^2)\dot{r}^2 + (2ag - \omega^2)r^2$$

folgt 0,5 P

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{C - (2ag - \omega^2)r^2}{1 + 4a^2r^2}}$$

also 0,5 P

$$t - t_0 = \int_{r_0}^{r} \sqrt{\frac{1 + 4a^2r^2}{C - (2ag - \omega^2)r^2}}\, dr$$